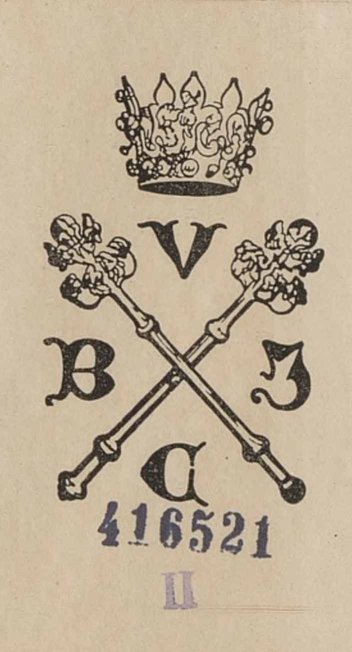



V
B J
C

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

H

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME XVII

ANNÉE 1938, FASCICULE I

KRAKÓW 1938

Table des matières

du t. XVII, fascicule I

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME XVII

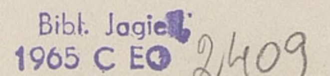
ANNÉE 1938

RÉDACTEUR: STANISLAS ZAREMBA
SECRÉTAIRE DE LA RÉDACTION: FRANÇOIS LEJA

KRAKÓW 1938



PRINTED IN POLAND
*
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
*
Reprodukcja fotooffsetowa, 1965
Zakład Graficzny PWN, Łódź



SUR UNE FAMILLE DE FONCTIONS HARMONIQUES LIÉES À UNE FONCTION DONNÉE DANS UN INTERVALLE

Par Franciszek Leja, Kraków

Soit $f(x)$ une fonction réelle, définie et continue dans un intervalle $I=\langle a,b\rangle$, λ un paramètre réel et n un nombre naturel fixe. Étant donnés $n+1$ nombres différents quelconques $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$, appartenant à I, que nous désignerons aussi par une seule lettre ζ

(1) $$\{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n\}=\zeta,$$

considérons les $n+1$ polynômes de Lagrange correspondant aux points (1):

$$L_n^{(j)}(x,\zeta)=\frac{x-\zeta_0}{\zeta_j-\zeta_0}\cdots\frac{x-\zeta_{j-1}}{\zeta_j-\zeta_{j-1}}\cdot\frac{x-\zeta_{j+1}}{\zeta_j-\zeta_{j+1}}\cdots\frac{x-\zeta_n}{\zeta_j-\zeta_n}$$

et formons la somme

(2) $$F_n(x,\lambda,\zeta)=\sum_{j=0}^{n} e^{n\lambda f(\zeta_j)}\cdot|L_n^{(j)}(x,\zeta)|$$

se réduisant pour $x=\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ à

$$e^{n\lambda f(x)}$$

et ayant une valeur positive pour chaque valeur réelle ou complexe de la variable x.

Lorsque les points (1) varient arbitrairement dans l'intervalle I la somme $F_n(x,\lambda,\zeta)$ reste bornée inférieurement pour chaque x, λ et n fixe. Posons

(3) $$F_n(x,\lambda) = \underset{(\zeta\in I)}{\text{borne inf}}\,\{F_n(x,\lambda,\zeta)\}$$

et observons qu'on a toujours $F_n(x,\lambda)>0$, donc la formule

(4) $$f_n(x,\lambda)=1/n\log F_n(x,\lambda), \qquad \text{pour} \quad n=1,2,\ldots,$$

fait correspondre à chaque λ réel une suite infinie de fonctions réelles, définies dans le plan entier de la variable complexe x.

Dans le travail: Sur certaines propriétés de la formule d'interpolation de LAGRANGE, inséré dans ce journal[1]), j'ai démontré que:

I. *La suite* (4) *tend pour chaque x et λ fixe vers une limite finie*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,\lambda)=f(x,\lambda), \tag{5}$$

la fonction limite $f(x,0)$, correspondant à $\lambda=0$, étant identique à la fonction de Green du domaine infini extérieur à I ayant son pôle au point $x=\infty$.

II. *Pour chaque valeur fixe de x appartenant à l'intervalle I l'expression*

$$\sqrt[\lambda]{f(x,\lambda)} \tag{6}$$

reste bornée au voisinage de $\lambda=0$.

Les fonctions de la variable complexe x de la famille

$$f(x,\lambda), \qquad -\infty<\lambda<\infty,$$

dépendent manifestement dans le cas $\lambda\neq0$ de la fonction donnée $f(x)$. On sait qu'elles sont toutes harmoniques et régulières dans le plan entier de x à l'exception des points de l'intervalle I au plus[2]).

Le but de ce travail est de préciser la proposition II et d'en tirer une méthode d'approximation des fonctions continues. Nous allons notamment démontrer le théorème suivant:

III. *L'expression* (6) *tend dans l'intervalle I vers la fonction donnée $f(x)$ lorsque λ tend vers zéro*

$$\lim_{\lambda\to0} \sqrt[\lambda]{f(x,\lambda)}=f(x),$$

la convergence étant uniforme dans l'intervalle I.

---

[1]) t. XVI, 1938, p. 112—125.

[2]) Bulletin de l'Acad. Polon. des Sc. et des Lettres, Sc. Mathém., Kraków, 1936, p. 79—92.

Démonstration. Désignons, comme dans le travail précédent [3]), par $\Phi_n^{(j)}(x,\lambda,\zeta)$ pour $j=0,1,\dots,n$ le polynôme

(7) $$\Phi_n^{(j)}(x,\lambda,\zeta)=L_n^{(j)}(x,\zeta)\cdot e^{n\lambda f(\zeta_j)}$$

et soit

(8) $$\Phi_n(x,\lambda)=\underset{(\zeta\in I)}{\text{borne inf}}\,\{\max_{(j)}|\Phi_n^{(j)}(x,\lambda,\zeta)|\}$$

la borne inférieure du plus grand des modules $\Phi_n^{(j)}(x,\lambda,\zeta)$, $j=0,1,\dots,n$, lorsque, x, λ et n étant fixes, les points (1) varient arbitrairement dans l'intervalle I. On sait d'après ce travail que, quels que soient x et λ, il existe la limite

(9) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Phi_n(x,\lambda)}=\Phi(x,\lambda)$$

et qu'on a identiquement

(10) $$f(x,\lambda)=\log\Phi(x,\lambda).$$

D'autre part, on sait que, si x appartient à l'intervalle I, on a, quel que soit $\lambda\gtreqless 0$, l'inégalité

(11) $$\Phi(x,\lambda)\leqslant e^{\lambda f(x)}.$$

Je dis qu'à chaque $\varepsilon>0$ on peut faire correspondre deux nombres positifs λ_1 et λ_2 tels que, quel que soit x appartenant à I, on ait les inégalités suivantes:

(12) $$\begin{aligned}\Phi(x,\lambda)&\geqslant e^{\lambda[f(x)-\varepsilon]} \quad \text{si} \quad 0<\lambda<\lambda_1,\\ \Phi(x,\lambda)&\geqslant e^{\lambda[f(x)+\varepsilon]} \quad \text{si} \quad -\lambda_2<\lambda<0.\end{aligned}$$

En effet, soit η un nombre positif quelconque. Puisque la fonction $e^{f(x)}$ est continue dans I il existe d'après le théorème connu de Weierstrass un polynôme $P_k(x)$ et un nombre $\delta>0$ tels qu'on ait dans l'intervalle I

(13) $$e^{\varrho f(x)-\eta}<P_k(x)<e^{\varrho f(x)+\eta}$$

pour chaque valeur de ϱ remplissant la condition

(14) $$1\leqq\varrho<1+\delta.$$

[3]) Ce journal t. XVI, 1938, p. 114. Je suppose que ce travail est connu du lecteur.

Soit k le degré du polynôme $P_k(x)$. Posons

$$\lambda_1=1/k$$

et soit λ un nombre fixe quelconque satisfaisant aux inégalités

$$0<\lambda<\lambda_1.$$

Il est clair qu'on peut lui faire correspondre deux nombres naturels p et q et un nombre ϱ appartenant à l'intervalle (14) tels qu'on ait

$$\lambda=\varrho\cdot p/q. \tag{15}$$

Observons qu'on a l'inégalité

$$p/q<1/k \tag{16}$$

car p/q est plus petit que λ et λ est plus petit que $1/k$.

Soit n un nombre naturel fixe quelconque de la forme

$$n=\nu\cdot q/p, \quad \text{où} \quad \nu=p,\ 2p,\ 3p,\ \dots \tag{17}$$

et x un nombre appartenant à l'intervalle I. Faisons correspondre à ces deux nombres et au nombre λ considéré plus haut $n+1$ points

$$\{y_0,y_1,\dots,y_n\}=y$$

de l'intervalle I tels qu'on ait

$$\Phi_n(x,\lambda)\leqq\max_{(j)}|\Phi_n^{(j)}(x,\lambda,y)|<2\Phi_n(x,\lambda) \tag{18}$$

ce qui est toujours possible d'après la formule (8) car on a toujours $\Phi_n(x,\lambda)>0$. Formons maintenant les polynômes de LAGRANGE $L_n^{(j)}(x,y)$, $j=0,1,\dots,n$, correspondant aux points $y_0,y_1,\dots,y_n$ et observons que leur degré n est, d'après (16) et (17), plus grand que $k\nu$. Puisque le polynôme

$$[P_k(x)]^\nu$$

est du degré $k\nu$, on a d'après la formule d'interpolation de LAGRANGE identiquement

$$[P_k(x)]^\nu=\sum_{j=0}^{n}[P_k(y_j)]^\nu\cdot L_n^{(j)}(x,y),$$

d'où résulte, d'après (13), l'inégalité

$$e^{\nu\varrho f(x)-\nu\eta} \leqq \sum_{j=0}^{n} e^{\nu\varrho f(y_j)+\nu\eta} \cdot |L_n^{(j)}(x,y)|.$$

Mais on a, d'après (15) et (17), $\nu\varrho = n\lambda$ et, comme

$$L_n^{(j)}(x,y)\, e^{n\lambda f(y_j)} = \Phi_n^{(j)}(x,\lambda,y),$$

on voit que

$$e^{n\lambda f(x)-n\lambda\eta/\varrho} \leqq \sum_{j=0}^{n} e^{n\lambda\eta/\varrho} \cdot |\Phi_n^{(j)}(x,\lambda,y)|$$

et par suite on a d'après (18)

$$e^{n\lambda f(x)-n\lambda\eta/\varrho} \leqq 2(n+1)\, e^{n\lambda\eta/\varrho} \cdot \Phi_n(x,\lambda),$$

ce qui entraîne immédiatement l'inégalité

$$\sqrt[n]{\Phi_n(x,\lambda)} \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{2(n+1)}} \cdot e^{\lambda[f(x)-2\eta/\varrho]}.$$

Faisons maintenant tendre le nombre n vers l'infini en posant $n = \nu \cdot q/p$ et $\nu = p, 2p, 3p, \ldots$ En tenant compte de la formule (9) on déduit de la dernière inégalité la suivante

$$\Phi(x,\lambda) \geqq e^{\lambda[f(x)-2\eta/\varrho]}$$

et, puisque $\varrho \geqq 1$, on voit que, si $0<\lambda<\lambda_1$, on a

$$\Phi(x,\lambda) \geqq e^{\lambda[f(x)-2\eta]}.$$

La première des inégalités (12) est donc démontrée car on peut poser $2\eta = \varepsilon$.

Pour établir la seconde des inégalités (12) considérons un nombre positif quelconque η et faisons correspondre à la fonction $e^{-f(x)}$ un polynôme $Q_m(x)$ et un nombre $\delta>0$ tels qu'on ait dans l'intervalle I

(19) $$e^{-\varrho f(x)-\eta} < Q_m(x) < e^{-\varrho f(x)+\eta}$$

pour chaque valeur de ϱ remplissant la condition $1 \leqq \varrho < 1+\delta$. Soit m le degré du polynôme $Q_m(x)$. Posons $\lambda_2 = 1/m$ et soit λ un nombre fixe quelconque appartenant à l'intervalle $-\lambda_2 < \lambda < 0$. On peut lui donner la forme

$$\lambda = -\varrho \cdot p/q,$$

où ϱ appartient à l'intervalle $\langle 1, 1+\delta \rangle$ et où p et q sont des nombres naturels remplissant la condition $p/q < 1/m$.

Soit n un nombre naturel de la forme (17) et x un nombre appartenant à l'intervalle I. Faisons correspondre à ces deux nombres et à $\lambda = -\varrho \cdot p/q$, $n+1$ points $y_0, y_1, \ldots, y_n$ de l'intervalle I tels que les inégalités (18) soient satisfaites. Puisque $n = \nu \cdot q/p > \nu m$, le degré du polynôme

$$[Q_m(x)]^\nu$$

est plus petit que n, et par suite on a identiquement

$$[Q_m(x)]^\nu = \sum_{j=0}^{n} [Q_m(y_j)]^\nu \cdot L_n^{(j)}(x, y),$$

d'où résulte, d'après (19), l'inégalité

$$e^{-\varrho\nu f(x) - \nu\eta} \leqq \sum_{j=0}^{n} e^{-\varrho\nu f(y_j) + \nu\eta} \cdot |L_n^{(j)}(x, y)|$$

et comme $n\lambda = -\varrho\nu$ on en déduit d'après (18) l'inégalité suivante:

$$e^{n\lambda f(x) + n\lambda\eta/\varrho} \leqq 2(n+1) e^{-n\lambda\,\eta/\varrho} \cdot \Phi_n(x, \lambda).$$

Il en résulte comme plus haut que, si $-\lambda_2 < \lambda < 0$, on a

$$\Phi(x, \lambda) \geqq e^{\lambda[f(x) + 2\eta/\varrho]} \geqq e^{\lambda[f(x) + 2\eta]}$$

donc la seconde des inégalités (12) est établie car on peut poser $2\eta = \varepsilon$.

Des inégalités (11) et (12) résulte la conclusion suivante: À chaque nombre $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un nombre positif $\lambda_0 = \min(\lambda_1, \lambda_2)$ tel qu'on ait

$$f(x) - \varepsilon \leqq 1/\lambda \log \Phi(x, \lambda) \leqq f(x) \quad \text{si} \quad 0 < \lambda < \lambda_0,$$
$$f(x) \leqq 1/\lambda \log \Phi(x, \lambda) \leqq f(x) + \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < -\lambda < \lambda_0,$$

et par suite notre théorème est démontré car on a identiquement $f(x, \lambda) = \log \Phi(x, \lambda)$.

Considérons les fonctions $F_n(x, \lambda)$ définies par la formule (3) et correspondant à la fonction donnée $f(x)$. D'après les théorèmes I et II il existe dans l'intervalle I la limite réitérée

$$(20) \qquad \lim_{\lambda \to 0} \{\lim_{n \to \infty} 1/n\lambda \log F_n(x, \lambda)\}$$

et elle est égale à la fonction $f(x)$. En particulier on a dans l'intervalle I

$$(21) \qquad \lim_{m \to \infty} \{\lim_{n \to \infty} m/n \log F_n(x, 1/m)\} = f(x).$$

Cette formule permet d'approcher une fonction continue quelconque $f(x)$, définie dans un intervalle I, par des valeurs frontières des fonctions harmoniques

$$\lim_{n\to\infty} m/n \log F_n(x, 1/m) = mf(x, 1/m), \qquad m=1,2,...,$$

régulières dans le plan entier à l'exception des points de l'intervalle I au plus.

Remarquons que si λ tend vers zéro par des valeurs d'un même signe la limite (20) existe aussi à l'extérieur de l'intervalle I, mais, dans ce domaine, elle est partout infinie.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES TRANSFORMATIONS ESSENTIELLES

Par Karol Borsuk, Warszawa

1. Une transformation continue f d'un espace[1]) X en un autre espace Y est dite, d'après M. H. Hopf[2]), *essentielle*, lorsque pour toute famille de fonctions $\{f_t\} \subset Y^X$ [3]) telle que $f_0 = f$ on a $Y = f_1(X)$. En généralisant cette notion, nous allons introduire la définition suivante:

Définition 1. *Un sous-ensemble B de Y est recouvert par l'image de la fonction f d'une manière essentielle*, lorsqu'il existe un entourage[4]) U de l'ensemble $f^{-1}(B)$ tel que pour toute famille de fonctions $\{f_t\} \subset Y^X$ satisfaisant aux conditions:

(1) $$f_0 = f,$$

(2) $$f_t(X-U) \subset Y-B \quad \textit{pour tout} \quad t \in \langle 0,1 \rangle \text{ [5])}$$

on ait

(3) $$B \subset f_1(X).$$

---

[1]) Tous les espaces à considérer seront supposés métriques.

[2]) Voir H. Hopf, *Über wesentliche und unwesentliche Abbildungen von Komplexen*, Recueil Math. de Moscou 1930, p. 53. Voir aussi P. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie* I, Berlin 1935, p. 492.

[3]) Y^X désigne la classe de toutes les transformations continues de l'espace X en sous-ensembles de l'espace Y. Par une *famille* $\{f_t\} \subset Y^X$ j'entends dans cette Note une fonction $f_t(x)$ de deux variables $x \in X$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$ telle que pour toute valeur de t on a $f_t \in Y^X$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\eta > 0$ tel que l'inégalité $|t - t'| < \eta$ entraîne l'inégalité $\varrho[f_t(x), f_{t'}(x)] < \varepsilon$ pour tout $x \in X$.

[4]) Par *entourage* (d'un point ou d'un ensemble) j'entends dans cette Note toujours un entourage *ouvert*.

[5]) $\langle \alpha, \beta \rangle$ désigne l'ensemble des nombres réels t assujettis à l'inégalité $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.

L'entourage U de B constituant aussi un entourage pour tout sous-ensemble de B, on en conclut:

(4) *Chaque sous-ensemble d'un ensemble recouvert par l'image de f d'une manière essentielle est lui-même recouvert par l'image de f d'une manière essentielle.*

2. Remarquons qu'on peut remplacer dans la définition d'un recouvrement essentiel la condition (2) par la condition suivante:

(2′) $f_t(x)=f(x)$ *pour tout* $x\in X-U$ et $t\in\langle 0,1\rangle$.

Afin de prouver ceci, il suffit de montrer que l'existence d'une famille de fonctions $\{f_t\}\subset Y^X$ satisfaisant aux conditions (1) et (2) et d'un point b tel que

(5) $$b\in B-f_1(X)$$

entraîne l'existence d'une famille $\{f_t^*\}\subset Y^X$ satisfaisant aux conditions

(1*) $f_0^*=f$,

(2*) $f_t^*(x)=f(x)$ *pour tout* $x\in X-U$ *et* $t\in\langle 0,1\rangle$,

(5*) $b\in B-f_1^*(X)$.

D'après (2) et (5) il existe pour tout $x\in X-U$ un entourage G_x tel que $b\in B-f_t(G_x)$ pour tout $t\in\langle 0,1\rangle$. Or, l'ensemble $G=\sum_{x\in X-U} G_x$ est un entourage de $X-U$ tel que

(6) $$b\in B-f_t(G) \quad \textit{pour tout} \quad t\in\langle 0,1\rangle.$$

Ceci établi, considérons dans le produit cartésien $X\times\langle 0,1\rangle$ les ensembles $(X-U)\times\langle 0,1\rangle$ et $(X-G)\times\langle 0,1\rangle$. Ces ensembles étant disjoints et fermés, la fonction réelle $\lambda(x,t)$ définie dans l'ensemble $T=(X-U)\times\langle 0,1\rangle+(X-G)\times\langle 0,1\rangle+X\times(0)$ par les formules

(7) $$\lambda(x,t)=0 \quad \textit{pour tout} \quad (x,t)\in(X-U)\times\langle 0,1\rangle,$$

(8) $$\lambda(x,t)=t \quad \textit{pour tout} \quad (x,t)\in(X-G)\times\langle 0,1\rangle,$$

(9) $$\lambda(x,0)=0 \quad \textit{pour tout} \quad x\in X$$

est continue. L'ensemble T étant fermé, il existe un prolongement continu de $\lambda(x,t)$ (que nous allons désigner aussi par $\lambda(x,t)$) sur l'espace $X\times\langle 0,1\rangle$ tout entier avec les valeurs appartenant à $\langle 0,1\rangle$ tel que les fonctions $\lambda_t\epsilon\langle 0,1\rangle^X$ définies par la formule $\lambda_t(x)=\lambda(x,t)$ pour tout $x\epsilon X$ constituent une famille $\subset\langle 0,1\rangle^X$ [6]). Or en posant

$$f_t^*(x)=f_{\lambda(x,t)}(x) \quad \textit{pour tout} \quad x\epsilon X \quad \textit{et} \quad t\epsilon\langle 0,1\rangle,$$

on obtient une famille $\{f_t^*\}\subset Y^X$. En tenant compte de (9), on a

$$f_0^*(x)=f_{\lambda(x,0)}(x)=f_0(x)=f(x) \quad \textit{pour tout} \quad x\epsilon X,$$

c. à d. la condition (1*) est remplie. En outre, d'après (7) on a pour tout $x\epsilon X-U$ et $t\epsilon\langle 0,1\rangle$ l'égalité $f_t^*(x)=f_{\lambda(x,t)}(x)=f_0(x)=f(x)$, c. à d. la condition (2*) est remplie. On a enfin, d'après (8), (5) et (6): $f_1^*(X-G)=f_1(X-G)\subset f_1(X)\subset Y-(b)$ et $f_1^*(G)\subset Y-(b)$, d'où $f_1^*(X)=f_1^*(X-G)+f_1^*(G)\subset Y-(b)$, c. à d. la condition (5*) est remplie.

3. On a en outre la proposition suivante:

(10) *Si l'ensemble $B\subset Y$ est recouvert d'une manière essentielle par l'image d'une fonction continue f transformant un espace X en un sous-ensemble de Y et si X_0 est un sous-ensemble fermé de X contenant $f^{-1}(B)$ dans son intérieur, alors B est recouvert d'une manière essentielle par l'image de la fonction f considerée uniquement dans l'ensemble X_0.*

B étant recouvert d'une manière essentielle par l'image de f, il existe, d'après le N⁰ précédent, un entourage U de $f^{-1}(B)$ dans X tel que chaque famille $\{f_t\}\subset Y^X$ satisfaisant aux conditions (1) et (2') satisfait aussi à la condition (3). En posant maintenant $U_0=(X_0-\overline{X-X_0})\cdot U$, considérons une famille $\{f_t'\}\subset Y^{X_0}$ satisfaisant aux conditions: $f_0'=f$ et $f_t'(x)=f(x)$ pour tout $x\epsilon X_0-U_0$ et $t\epsilon\langle 0,1\rangle$. Or, en posant pour tout $t\epsilon\langle 0,1\rangle$

$$f_t(x)=f_t'(x) \quad \textit{pour tout} \quad x\epsilon X_0$$
$$f_t(x)=f(x) \quad \textit{pour tout} \quad x\epsilon X-X_0$$

---

[6]) Voir ma Note *Sur les prolongements des transformations continues*, Fund. Math. 18 (1936), p. 103.

on obtient évidemment une famille $\{f_t\} \subset Y^X$ satisfaisant aux conditions (1) et (2′). Il vient $B \subset f_1(X) = f_1(X_0) + f(X - X_0)$. Or, en tenant compte de l'inclusion $f^{-1}(B) \subset X_0$, on en conclut que $B \cdot f(X - X_0) = 0$, c. à d. $B \subset f_1(X_0)$. La proposition (10) est ainsi démontrée.

4. ***Exemple 1.*** Soit X un sous-ensemble compact de l'espace euclidien n-dimensionnel $R_n = Y$. Dans ces conditions l'ensemble $B = X - \overline{R_n - X}$ (c. à d. l'intérieur de X par rapport à l'espace R_n) est recouvert d'une manière essentielle par l'imgae de la fonction $f \epsilon Y^X$ transformant X par l'identité.

Ceci est une conséquence immédiate du N° **2** et du théorème [7]) d'après lequel pour toute fonction continue $\varphi \epsilon R_n^X$ transformant la frontière $X - B$ de X par l'identité, l'ensemble X est contenu dans $\varphi(X)$.

5. ***Exemple 2.*** Soient: X — la somme de deux intervalles $\langle -6, -1 \rangle$ et $\langle 1, 6 \rangle$; Y — l'ensemble de tous les nombres réels; B — l'intervalle $\langle -2, 2 \rangle$; f — la fonction définie par les formules $f(x) = x + 2$ pour tout $x \epsilon \langle -6, -1 \rangle$ et $f(x) = x - 2$ pour tout $x \epsilon \langle 1, 6 \rangle$.

On voit sans peine que tout point $b \epsilon B$ est recouvert par l'image de la fonction f d'une manière essentielle. Il n'en est pas ainsi pour l'ensemble B tout entier, car en posant

$$
\begin{array}{llll}
f_t(x) = x + 2 & \text{pour tout } x \epsilon \langle -6, -4 \rangle & \text{et} & t \epsilon \langle 0, 1 \rangle, \\
f_t(x) = x + 2 + t(-4 - x) & \text{pour tout } x \epsilon \langle -4, -1 \rangle & \text{et} & t \epsilon \langle 0, 1 \rangle, \\
f_t(x) = x - 2 + t(4 - x) & \text{pour tout } x \epsilon \langle 1, 4 \rangle & \text{et} & t \epsilon \langle 0, 1 \rangle, \\
f_t(x) = x - 2 & \text{pour tout } x \epsilon \langle 4, 6 \rangle & \text{et} & t \epsilon \langle 0, 1 \rangle
\end{array}
$$

on obtient, comme on vérifie sans peine, une famille $\{f_t\} \subset Y^X$ satisfaisant aux conditions (1) et (2) pour tout entourage U de l'ensemble $f^{-1}(B) = \langle -4, -1 \rangle + \langle 1, 4 \rangle$, tandis que la condition (3) n'est pas remplie, car $f_1(x) \neq 0$ pour tout $x \epsilon X$, c. à d. $0 \epsilon B - f_1(X)$.

6. ***Exemple 3.*** En posant $X = Y = R_n$, où R_n désigne l'espace euclidien n-dimensionnel, envisageons une transformation $f \epsilon Y^X$ dont toutes les trauches (c. à d. les ensembles de la forme

---

[7]) Voir ma Note *Sur les rétractes*, Fund. Math. 17 (1931), p. 161.

$f^{-1}(y)$, où $y \epsilon Y$) sont de diamètre inférieur à une constante positive ε. Nous allons démontrer dans ces conditions que *chaque ensemble compact $B \subset f(R_n)$ est recouvert d'une manière essentielle par l'image de la fonction f.*

L'ensemble $A = f^{-1}(B)$ étant compact[8]), il existe dans R_n une sphère n-dimensionnelle Q_n ayant 0 pour centre et dont le rayon est si grand que $A \subset Q_n$ et que la distance de chaque point de la surface $S_{n-1} = Q_n \cdot \overline{R_n - Q_n}$ de la sphère Q_n à l'ensemble B est $\geqslant \varepsilon$. Afin de prouver que B est recouvert d'une manière essentielle par l'image de f, il suffit de montrer que pour toute transformation $f' \epsilon R_n^{Q_n}$ coïncidant avec f dans la surface S_{n-1}, on a $B = f(A) \subset f'(Q_n)$. Si l'on suppose le contraire, il existe un $a \epsilon A$ tel que $f(a) \neq f'(x)$ pour tout $x \epsilon Q_n$. Or, en faisant correspondre à tout $x \epsilon Q_n$ le point $\varphi'_a(x) \epsilon S_{n-1}$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{f(a)f'(x)}$ et $\overrightarrow{0\varphi'_a(x)}$ soient parallèles, on obtient une fonction continue transformant Q_n en S_{n-1}. Par conséquent, la fonction φ'_a, considerée uniquement dans S_{n-1}, transforme S_{n-1} en soi d'une manière inessentielle. Mais c'est impossible, car φ'_a coïncide dans S_{n-1} avec la fonction $\varphi_a \epsilon S_{n-1}^{S_{n-1}}$ définie par la condition du parallèlisme des vecteurs $\overrightarrow{0\varphi_a(x)}$ et $\overrightarrow{f(a)f(x)}$ et cette dernière fonction transforme S_{n-1} en soi d'une manière essentielle[9]).

7. Soit V une variété m-dimensionnelle[10]) contenue dans une variété n-dimensionnelle W. Soit, en outre, Q_k la sphère euclidienne k-dimensionnelle dont le centre est 0 et le rayon 1.

Définition 2. *La variété V est située dans la variété W dans une position localement régulière*, lorsqu'il existe pour tout $p \epsilon V$ une homéomorphie h transformant le produit $Q_m \times Q_{n-m}$ en un sous-ensemble Z de W de façon que $h(0,0) = p$ et $h^{-1}(V \cdot Z) = Q_m \times (0)$.

---

[8]) Voir ma Note *Über stetige Abbildungen der euklidischen Räume*, Fund. Math. 21 (1933), p. 241.

[9]) l. c. p. 238.

[10]) On entend par *variété n-dimensionnelle* un espace connexe qui est dans chacun de ses points localement homéomorphe à l'espace euclidien n-dimensionnel R_n.

Exemples: 1) D'après une remarque de M. H. Whitney, il résulte d'un théorème de M. T. Ważewski[11]) que chaque variété différentielle contenue dans l'espace euclidien n-dimensionnel y est située dans une position localement régulière.

2) En tenant compte du théorème[12]), d'après lequel toute homéomorphie transformant un arc simple contenu dans le plan euclidien R_2 en un autre arc simple situé dans R_2 se laisse étendre à une homéomorphie transformant R_2 en soi, on conclut que chaque courbe simple fermée contenue dans une surface (c. à d. dans une variété à deux dimensions) y est située dans une position localement régulière.

8. Le but principal de ce travail est de démontrer le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit W une variété n-dimensionnelle et V une variété compacte m-dimensionnelle située dans W dans une position localement régulière et soit M un espace arbitrairement donné. Dans ces conditions, chaque fonction $f \in W^M$, dont l'image recouvre V d'une manière essentielle, transforme l'ensemble $f^{-1}(V)$ en V d'une manière essentielle.*

9. Le théorème 1 conduit au corollaire suivant:

Corollaire. *Soit f une fonction continue transformant l'espace euclidien n-dimensionnel R_n en soi et dont les tranches sont de diamètre inférieur à une constante positive ε. Dans ces conditions aucune variété compacte située dans R_n dans une position localement régulière n'est un rétracte de $f(R_n)$.*

Soit, en effet, $V \subset f(R_n)$ une variété compacte située dans R_n dans une position localement régulière. En tenant compte de l'exemple du N° **6** on conclut que $f^{-1}(V)$ est un ensemble compact et que V est recouvert d'une manière essentielle par l'image de la fonction f.

Supposons maintenant qu'il existe une fonction r rétractant $f(R_n)$ en V. En désignant pour tout $p=(x_1,x_2,...,x_n)\in R_n$ et tout λ réel par $\lambda\cdot p$ le point $(\lambda\cdot x_1, \lambda\cdot x_2,...,\lambda\cdot x_n)$, posons $\varphi_t(p)=r\{f[(1-t)p]\}$ pour tout $p\in f^{-1}(V)$ et $t\in\langle 0,1\rangle$. Les fonc-

---

[11]) H. Whitney, *The Imbedding of Manifolds in Families of Analytic Manifolds*, Annals of Math. 37 (1936), p. 863-878. T. Ważewski, *Sur les matrices dont les éléments sont des fonctions continues*, Compositio Math. 2 (1935), p. 63-68.

[12]) Voir L. Antoine, *Thèse*, Strasbourg 1921.

tions φ_t ainsi définies constituent une famille $\{\varphi_t\}) \subset V^{f^{-1}(V)}$ telle qu'on a: $\varphi_0(p)=rf(p)=f(p)$ et $\varphi_1(p)=rf(0)=\text{const.}$ pour tout $p \epsilon f^{-1}(A)$, ce qui est impossible puisque, d'après le théorème 1, la fonction f transforme $f^{-1}(V)$ en V d'une manière essentielle.

10. Le théorème 1 est une conséquence facile du théorème suivant:

Théorème 2. *Soit V une variété compacte m-dimensionnelle située dans une variété n-dimensionnelle W dans une position localement régulière et soit f une transformation continue d'un espace M en W. Dans ces conditions il existe pour toute famille de fonctions $\{\varphi_t\} \subset V^{f^{-1}(V)}$ satisfaisant à l'égalité $\varphi_0(p)=f(p)$ pour tout $p \epsilon f^{-1}(V)$, une famille $\{f_t\} \subset W^M$ telle que f_0 coïncide avec f et que pour tout $t \epsilon \langle 0,1 \rangle$ la fonction f_t est un prolongement de φ_t et $f_t^{-1}(V)=f^{-1}(V)$.*

En effet, pour déduire le théorème 1 du théorème 2, remarquons que si f transforme $f^{-1}(V)$ en V d'une manière inessentielle, alors il existe une famille $\{\varphi_t\} \subset V^{f^{-1}(V)}$ telle que $\varphi_0(p)=f(p)$ pour tout $p \epsilon f^{-1}(V)$ et $\varphi_1[f^{-1}(V)] \neq V$. Or, d'après le théorème 2, il existe une famille $\{f_t\} \subset W^M$ telle que f_0 coïncide avec f et que pour tout $t \epsilon \langle 0,1 \rangle$ la fonction f_t est un prolongement de φ_t satisfaisant à la condition $f_t^{-1}(V)=f^{-1}(V)$. Soit maintenant U un entourage arbitrairement donné de $f^{-1}(V)$ dans l'espace M. Les ensembles $f_t(M-U)$ et V étant disjoints, les conditions (1) et (2) de la définition 1 sont remplies. Il n'en pas ainsi pour la condition (3), car l'ensemble $f_1(M)$ est la somme de deux ensembles $f_1[M-f^{-1}(V)]$ et $f_1[f^{-1}(V)]=\varphi_1[f^{-1}(V)]$ dont le premier est disjoint avec V et le deuxième est $\subset V$ et $\neq V$. Ceci prouve que l'ensemble V n'est pas recouvert par f d'une manière essentielle.

11. Par une *déformation d'un espace M dans soi* on entend une famille $\{f_t\} \subset M^M$ telle que $f_0(p)=p$ pour tout $p \epsilon M$.

Soit A un sous-ensemble de M et $\{\varphi_t\}$ une déformation continue de A dans soi. Une déformation $\{f_t\}$ de M dans soi sera dite *parallèle à la déformation* $\{\varphi_t\}$, lorsque $f_t^{-1}(A)=A$ et $f_t(p)=\varphi_t(p)$ pour tout $t \epsilon \langle 0,1 \rangle$ et $p \epsilon A$. En rapprochant cette notion du théorème 2, on parvient au corollaire suivant:

Corollaire. *Etant donnée une variété compacte V située dans une autre variété W dans une position localement régulière, il existe pour toute déformation de V dans soi une déformation parallèle de W dans soi.*

12. Les deux exemples qui suivent montrent que le dernier corollaire (et par suite aussi le théorème 2) cesse d'être vrai lorsqu'on supprime l'hypothèse que la position de la variété V dans la variété W soit localement régulière.

Exemple 4. Les points de la forme $(x,y,z,0)$ constituent dans l'espace euclidien 4-dimensionnel R_4 un ensemble qui peut être identifié avec l'espace euclidien 3-dimensionnel R_3. Soit Ω une courbe simple fermée $\subset R_3$ polygonale et formant dans R_3 un noeud. Or il existe dans $R_3 - \Omega$ des parcours fermés dont le coefficient d'enlacement avec Ω s'annule et qui, malgré cela, sont non homotopes à zéro dans $R_3 - \Omega$. En posant maintenant $a=(0,0,0,1)$ et $a^*=(0,0,0,-1)$, désignons par A la somme de tous les segments rectilignes $\overline{ap}$ et $\overline{a^*p}$, le point p parcourant la courbe Ω. On voit aisément que A est un polyèdre homéomorphe à la surface sphérique de dimension 2.

Ceci établi, envisageons une déformation $\{\varphi_t\}$ de A dans soi par laquelle le point a est transformé en un point $\varphi_1(a) \in A-(a)-(a^*)$. Nous allons prouver qu'il n'existe aucune déformation de R_4 dans soi parallèle à $\{\varphi_t\}$. Dans ce but remarquons que pour tout entourage U de a (dans R_4) il existe dans $U-A$ des parcours fermés qui ne sont pas homotopes à zéro dans R_4-A, quoique leur coefficient d'enlacement avec A s'annule. C'est une conséquence facile de trois propositions suivantes, dont la démonstration ne présente aucune difficulté: 1⁰ Chaque parcours fermé situé dans $R_3-\Omega$ est homotope dans R_4-A à un parcours fermé situé dans U; 2⁰ Le coefficient d'en. lacemant (dans R_3) d'un parcours fermé situé dans $R_3-\Omega$ avec Ω coïncide avec le coefficient d'enlacement de ce parcours avec la surface A (dans R_4); 3⁰ Pour les parcours fermés situés dans $R_3-\Omega$ l'homotopie à zéro dans $R_3-\Omega$ et l'homotopie à zéro dans R_4-A sont équivalentes. Remarquons enfin qu'il existe un entourage U' du point $\varphi_1(a)$ (dans R_4) tel que chaque parcours fermé situé dans $U'-A$, dont le coeffiient d'enclacement avec A s'annule, est homotope à zero dans R_4-A.

Supposons, à présent, qu'il existe une léformation $\{f_t\}$ de l'espace R_4 dans soi parallèle à la déformation $\{\varphi_t\}$. En fixent l'entourage U', on peut choisir l'entourage U de manière qu'on ait $f_1(U) \subset U'$. Or, la déformation $\{f_t\}$ transforme tout parcours fermé Λ situé dans $U-A$ en un parcours fermé Λ' situé dans $U'-A$ et homotope à Λ dans R_4-A. En choisissent le parcours Λ de manière que son coefficient d'enlacement avec A s'annule et qu'il ne soit pas homotope à zéro dans R_4-A, on parvient ainsi à un parcours fermé Λ' situé dans $U'-A$ dont le coefficient d'enlacement avec A s'annule et qui n'est pas homotope à zéro dans R_4-A. Or ceci contredit la définition d'entourage U'.

Il résulte en particulier de cet exemple qu'il existe dans R_4 des variétés polyèdriques dont la position n'est pas localement régulière.

13. ***Exemple 5.*** En utilisant l'exemple bien connu dû à M. L. Antoine[11]) d'une courbe simple fermée dans R_3 dont l'homéomorphie avec une circonférence ne se laisse prolonger sur aucun entourage, on voit aisément que cette courbe constitue un exemple d'une variété dans R_3 pour laquelle la thèse du corollaire du N⁰ **11** n'est plus valable. D'une façon pareille, en utilisant un exemple dû à M. J. W. Alexander[13]), on voit qu'il existe dans R_3 des surfaces (c. à d. des variétés de dimension 2) dont la position dans R_3 n'est pas localement régulière.

Problème. *Soit A une variété homéomorphe à une surface sphérique $(n-1)$-dimensionnelle située dans R_n dans une position localement régulière. Existe-t-il une homéomorphie transformant R_n en soi de manière que A soit transformé en une surface sphérique?*

14. L'exemple du N⁰ **12** montre que la thèse du théorème 2 cesse d'être vraie lorsqu'on supprime l'hypothèse que la variété V est située dans la variété W dans une position localement régulière. La question s'impose si cette dernière hypothèse est indispensable aussi dans le théorème 1. Nous ne savons la resondre que dans un cas special, par la démonstation du théorème suivant:

Théorème 3. *Si Ω est une courbe simple fermée située dans une variété polyédrique*[14]) *(compacte ou non) W et si f est une fonction continue transformant un espace M en W de façon*

---

[13]) J. W. Alexander, *An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected,* Proc. Nat. Acad. 10 (1924), p. 8-10.

[14]) c. à d. dans une variété admettant une décomposition simpliciale.

que pour tout ensemble compact $C \subset W$ l'ensemble $f^{-1}(C)$ soit compact et que la courbe Ω soit recouverte par l'image de f d'une manière essentielle, alors f transforme l'ensemble $f^{-1}(\Omega)$ en Ω d'une manière essentielle.

15. On déduit du théorème 3 le corollaire suivant:

Corollaire. *Si Ω, W, M et f satisfont aux hopothèses du théorème 3 et si, en outre, tout ensemble compact $C \subset M$ se laisse contracter*[15] *dans M, alors Ω n'est pas un rétracte de $f(M)$.*

Supposons, au contraire, qu'il existe une fonction $r(p)$ rétractant l'ensemble $f(M)$ en Ω. Soit $\{\varphi_t\}$ une famille de fonctions contractant l'ensemble $f^{-1}(\Omega)$ dans M. En posant $\psi_t(p) = r\varphi_t(p)$ pour tout $p \epsilon f^{-1}(\Omega)$ et $t \epsilon \langle 0,1 \rangle$, on obtient une famille de fonctions $\{\psi_t\} \subset \Omega^{f^{-1}(\Omega)}$ telle que $\psi_0(p) = f(p)$ et $\psi_1(p) = \text{const.}$ pour tout $p \epsilon f^{-1}(\Omega)$. La transformation f de $f^{-1}(\Omega)$ en Ω n'est donc pas essentielle ce qui contredit la thèse du théorème 3.

16. Soit f une transformation continue de l'espace euclidien n-dimensionnel R_n en soi, pour laquelle le diamètre de toute tranche est inférieur à une certaine constante positive ε. Dans ces conditions, l'ensemble $f(R_n)$ est un domaine ouvert dans R_n [8]) et, comme nous l'avons prouvé dans le N⁰ **6**, tout sous-ensemble compact de $f(R_n)$ est recouvert par l'image de la fonction f d'une manière essentielle. En tenant compte du corollaire précédent, on en conclut qu'aucune courbe simple fermée n'est un rétracte de $f(R_n)$. Cette dernière propriété étant équivalente avec l'unicohérence du domaine $f(R_n)$ [16]), on parvient au corollaire suivant:

Corollaire. *Si f est une transformation de R_n en soi avec le diamètre des tranches uniformément borné, alors l'ensemble $f(R_n)$ est unicohérent.*

17. Comme nous l'avons établi dans le N⁰ **10**, le théorème 1 est une conséquence du théorème 2. Il ne reste donc qu'à prouver les théorèmes 2 et 3. Nous commençons par la démonstration du

[15]) *L'ensemble C se laisse contracter dans un espace M,* lorsqu'il existe une famille $\{\varphi_t\} \subset M^C$ contractant l'ensemble C dans M, c. à d. telle que $\varphi_0(x) = x$ et $\varphi_1(x) = \text{const.}$ pour tout $x \epsilon C$.

[16]) Voir ma Note „*Quelques théorèmes sur les ensembles unicohérents*" Fund. Math. 17 (1931), p. 184.

Lemme 1. Prémisses: 1^0 *f est une transformation continue d'un espace arbitraire M en produit $Q=Q_m\times Q_{n-m}$, où Q_i désigne la sphère euclidienne i-dimensionnelle dont le centre est* 0 *et le rayon* 1.

2^0 *N est un sous-ensemble fermé de M tel que $f^{-1}(Q_m\times(0))\subset N$.*

3^0 *$\{\varphi_t\}$ est une famille de fonctions $\subset(Q_m\times Q_{n-m})^N$ satisfaisant aux conditions $\varphi_0(p)=f(p)$ pour tout $p\epsilon N$ et $\varphi_t^{-1}(Q_m\times(0))=f^{-1}(Q_m\times(0))$ pour tout $t\epsilon\langle 0,1\rangle$.*

Thèse. *Il existe une famille de fonctions $\{f_t\}\subset(Q_m\times Q_{n-m})^M$ telle que:* 1^0 *$f_0=f$;* 2^0 *$f_t(p)=\varphi_t(p)$ pour tout $p\epsilon N$ et $t\epsilon\langle 0,1\rangle$;* 3^0 *$f_t^{-1}(Q_m\times(0))=f^{-1}(Q_m\times(0))$ pour tout $t\epsilon\langle 0,1\rangle$.*

Démonstration. Les fonctions f et φ_t sont de la forme

(11) $f(p)=(x(p),y(p))$ *où* $x\epsilon Q_m^M$ *et* $y\epsilon Q_{n-m}^M$,

(12) $\varphi_t(p)=(\xi_t(p),\eta_t(p))$ *où* $\{\xi_t\}\subset Q^N$ *et* $\{\eta_t\}\subset Q_{n-m}^N$.

On a en outre

(13) $y^{-1}(0)=\eta_t^{-1}(0)$ *pour tout* $t\epsilon\langle 0,1\rangle$,

(14) $\xi_0(p)=x(p)$ *et* $\eta_0(p)=y(p)$ *pour tout* $p\epsilon N$.

D'après un théorème général [6]), il existe une famille de fonctions $\{x_t\}\subset Q_m^M$ telle que

(15) $x_t(p)=\xi_t(p)$ *pour tout* $p\epsilon N$,

(16) $x_0(p)=x(p)$ *pour tout* $p\epsilon M$.

En désignant maintenant par S_{n-m-1} la surface de la sphère Q_{n-m}, posons

$r(a)=\varrho(a,0)$ *pour tout* $a\epsilon Q_{n-m}$,

$\theta(a)=$ *projection du point a du centre* 0 *sur* S_{n-m-1},

pour tout $a\epsilon Q_{n-m}-(0)$.

Nous pouvons considérer $r(a)$ et $\theta(a)$ comme des *„coordonnées polaires"* du point $a\epsilon Q_{n-m}-(0)$, en écrivant

(17) $a=[r(a),\theta(a)]$ pour tout $a\epsilon Q_{n-m}-(0)$.

Les fonctions $r\eta_t$ constituent une famille $\subset\langle 0,1\rangle^N$. La fonction ry constituant un prolongement continu de la fonction $r\eta_0$ sur l'espace M tout entier et $\langle 0,1\rangle$ étant un rétracte absolu, on conclut [6]) de (14) qu'il existe une famille de fonctions

$\{a_t\} \subset \langle 0,1\rangle^M$ telle que a_t soit un prolongement de la fonction $r\eta_t$ et que $a_0(p)=ry(p)$ pour tout $p \epsilon M$. En désignant maintenant par T l'ensemble $N \times \langle 0,1\rangle + M \times (0)$, fermé dans l'espace $M \times \langle 0,1\rangle$, posons

$$r_t(p)=a_t(p)+\mathrm{Min}\{\varrho[(p,t),T],\ 1-a_t(p)\}$$

pour tout $(p,t) \epsilon M \times \langle 0,1\rangle$. On parvient ainsi à une famille $\{r_t\} \subset \langle 0,1\rangle^M$ satisfaisant aux conditions:

(17) $r_t(p)=r\eta_t(p)$ *pour tout* $(p,t) \epsilon N \times \langle 0,1\rangle$,

(18) $r_0(p)=ry(p)$ *pour tout* $p \epsilon M$,

(19) *Pour que* $r_t(p)=0$ *il faut et il suffit que* $p \epsilon f^{-1}(Q_m \times (0))$.

Ceci étant, posons pour tout i naturel

(20) $$M_i=\underset{p}{E}\,[p \epsilon M;\ r_t(p) \geqslant 1/i \quad \textit{pour tout} \quad t \epsilon \langle 0,1\rangle].$$

En tenant compte de la relation (19) et de la continuité de la fonction $r_t(p)$, on a

(21) $$M-f^{-1}(Q_m \times (0))=\sum_{n=1}^{\infty} M_i$$

(22) $$M_i \subset M_{i+1}-\overline{M-M_{i+1}}.$$

Les fonctions η_t constituant une famille $\subset Q_{n-m}^N$ et la fonction θ étant uniformément continue dans l'ensemble $\underset{a}{E}[a \epsilon Q_{n-m}; r(a) \geqslant 1]$, on conclut de (17) et (20) que les fonctions $\theta\eta_t$ considerées uniquement dans l'ensemble $N \cdot M_i$ constituent une famille de fonctions $\subset S_{n-m-1}^{N \cdot M_i}$. Or, en posant $M_0=0$, admettons que nous avons déjà défini une famille de fonctions $\{\theta_t\} \subset S_{n-m-1}^{M_i}$ telle que

(23_i) $\theta_t(p)=\theta\eta_t(p)$ *pour tout* $p \epsilon N \cdot M_i$ et $t \epsilon \langle 0,1\rangle$,

(24_i) $\theta_0(p)=\theta y(p)$ *pour tout* $p \epsilon M_i$.

La fonction $\theta y(p)$ constituant un prolongement de la fonction $\theta\eta_0$ sur l'ensemble $M-f^{-1}(Q_m \times (0))$ et la surface sphérique S_{n-m-1} étant un rétracte absolu de voisinage [17]), on conclut d'un théorème général [6]) et de (14) que les fonctions θ_t

---

[17]) Un ensemble A est dit *rétracte absolu de voisinage* lorsqu'il existe pour tout espace A une fonction continue $r(x)$ transformant un entourage U de A en A de manière que $r(x)=x$ pour tout $x \varepsilon A$.

se laissent prolonger sur l'ensemble M_{i+1} de manière que les fonctions prolongées (que nous désignons aussi par θ_t) constituent une famille $\subset S_{n-m-1}^{M_{i+1}}$ satisfaisant aux conditions (23_{i+1}) et (24_{i+1}). En itérant ce procédé on parvient, selon (21) et (22), aux fonctions $\theta_t \epsilon S_{n-m+1}^{M-f^{-1}(Q_m\times(0))}$ qui, considerées seulement dans l'ensemble M_i (où le nombre naturél i est arbitrairement donné) constituent une famille, c. à d. $\theta_t(p)$ considerée comme une fonction de $(p,t)\epsilon[M-f^{-1}(Q_m\times(0))]\times\langle 0,1\rangle$ et continue et qu'elle est uniformément continue par rapport à t dans chacun des ensembles $M_i\times\langle 0,1\rangle$.

Cela posé, nous allons montrer que pour obtenir une famille $\{f_t\}$ satisfaisant à la thèse du lemme il suffit de poser

(25) $f_t(p)=(x_t(p), [r_t(p),\theta_t(p)])$ *pour tout* $p\epsilon M-f^{-1}(Q_m\times(0))$ *et* $t\epsilon\langle 0,1\rangle$,

(26) $f_t(p)=(x_t(p),0)$ *pour tout* $p\epsilon f^{-1}(Q_m\times(0))$ *et* $t\epsilon\langle 0,1\rangle$.

En tenant compte des relations (25), (26), (17), (19) et de la continuité des fonctions $x_t(p)$, $r_t(p)$ et $\theta_t(p)$, on conclut que $f_t(p)$ dépend d'une manière continue de la variable (p,t) parcourant $M\times\langle 0,1\rangle$. Afin de prouver que la continuité par rapport à t est uniforme, envisageons un $\varepsilon>0$ arbitrairement donné. Soit i_0 un nombre naturel tel que

(27) $$1/i_0<\varepsilon/3.$$

Les fonctions x_t et r_t constituant des familles et la fonction $\theta_t(p)$ étant uniformément continue par rapport à t dans l'ensemble M_{i_0}, il existe un $\eta>0$ tel que l'inégalité $|t-t'|<\eta$ entraîne les inégalités

(28) $\varrho(x_t(p)-x_{t'}(p))<\varepsilon/3$ *pour tout* $p\epsilon M$.

(29) $|r_t(p)-r_{t'}(p)|<\varepsilon/3$ *pour tout* $p\epsilon M$

(30) $\varrho(\theta_t(p)-\theta_{t'}(p))<\varepsilon/3$ *pour tout* $p\epsilon M_{i_0}$.

Or dans le cas où $p\epsilon M-M_{i_0}$ on a, selon (20) et (27), $r_t(p)<\varepsilon/3$ c. à d. les points $[r_t(p),\theta_t(p)]$ et $[r_{t'}(p),\theta_{t'}(p)]$ sont éloignés du point 0 de moins que $1/3\varepsilon$. On en conclut, d'après (25), (26) et (28) que

$$\varrho(f_t(p),f_{t'}(p))<\varepsilon$$

pour tout $p \epsilon M - M_{i_0}$. Or cette inégalité est aussi valable dans le cas où $p \epsilon M_{i_0}$, comme on déduit des relations (25), (28), (29) et (30).

Nous avons ainsi prouvé que les fonctions f_t constituent une famille $\{f_t\} \subset (Q_m \times Q_{n-m})^M$. Afin de montrer que cette famille satisfait à la condition 1⁰ de la thèse du lemme, remarquons que, d'après (18), (25), (26), (17) et (16), on a $f_0(p) = f(p)$ pour tout $p \epsilon M$. La condition 2⁰ de la thèse du lemme est une conséquence immédiate des formules (17), (23_i), (21), (15), (13) et (12). On prouve enfin la condition 3⁰ de la thèse du lemme en rapprochant les formules (25) et (26) de la relation (19).

La démonstration du lemme 1 est ainsi terminée.

18. ***Démonstration du théorème 2.*** La position de la variété compacte m-dimensionelle V dans la variété W étant, par hypothèse, localement régulière, il existe pour tout $p \epsilon V$ un élément n-dimensionnel $Q(p)$ de la forme $Q_m \times Q_{n-m}$ tel que $Q(p) \cdot V = Q_m \times (0)$ et $p = (0, 0)$. Il est, en outre, à remarquer qu'il existe entre les éléments $Q(p)$ satisfaisant à ces conditions des éléments dont le diamètre est aussi petit qu'on le veut. Il en résulte qu'en fixant un recouvrement $Q^{(0)}$ qui fait correspondre à tout $p \epsilon V$ un élément $Q^{(0)}(p)$ satisfaisant aux conditions en question, on peut trouver un autre recouvrement $Q^{(1)}$ qui fait correspondre à tout $p \epsilon V$ un élément $Q^{(1)}(p)$ satisfaisant aux conditions analogues, de manière que pour tout $p \epsilon V$ la somme de tous les éléments du recouvrement $Q^{(1)}$ non disjoints avec $Q^{(1)}(p)$ soit contenue dans un seul élément du recouvrement $Q^{(0)}$. Un recouvrement $Q^{(1)}$ satisfaisant à ces conditions sera appelé *raffinement* du recouvrement $Q^{(0)}$.

Soit $Q^{(0)}$ un recouvrement arbitrairement donné (mais fixe) de V. Il existe alors des recouvrements $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots, Q^{(n+1)}$ de sorte que $Q^{(i+1)}$ est un raffinement du recouvrement $Q^{(i)}$ pour tout $i = 0, 1, \dots, n$. La variété V étant compacte, il existe un nombre positif ε tel que chaque sous-ensemble de V de diamètre $\leqslant \varepsilon$ est contenu dans un des éléments $Q^{(n+1)}(p)$ du recouvrement $Q^{(n+1)}$.

Soit maintenant f une transformation continue d'un espace M en W et $\{\varphi_t\}$ une famille de fonctions $\subset V^{f^{-1}(V)}$ telle que $\varphi_0(p) = f(p)$ pour tout $p \epsilon f^{-1}(V)$. Il existe alors un nombre

naturel k tel que l'inégalité $|t-t'|\leqslant 1/k$ entraîne l'inégalité, $|\varphi_t(p)-\varphi_{t'}(p)|\leqslant\varepsilon'$ pour tout $p\epsilon f^{-1}(V)$. Il en résulte que pour tout $l=0,1,...(k-1)$ les fonctions $\varphi_t^{(l)}=\varphi_{\frac{l}{k}+\frac{1}{k}t}$, où $0\leqslant t\leqslant 1$, constituent une famille $\{\varphi_t^{(l)}\}\subset V^{f^{-1}(V)}$ telle que $|\varphi_t^{(l)}(p)-\varphi_{t'}^{(l)}(p)|<\varepsilon/3$ pour tout $p\epsilon f^{-1}(V)$ et $t,t'\epsilon\langle 0,1\rangle$. Or, pour obtenir une famille $\{f_t\}\subset W^M$ satisfaisant à la thèse du théorème 2, il suffit de prouver qu'on peut trouver tour à tour des familles $\{f_t^{(l)}\}\subset W^M$ telles que $f_t^{(l)}$ soit un prolongement de $\varphi_t^{(l)}$ et que $f_0^{(0)}=f$; $f_0^{(l+1)}=f_1^{(l)}$ et $f_t^{(l)-1}(V)=f_0^{(l)-1}(V)$ pour tout $l=0,1,...(k-1)$. Cette remarque nous permet de nous borner dans la démonstration du théorème 2 au cas où la famille donnée $\{\varphi_t\}\subset V^{f^{-1}(V)}$ satisfait ellemême à la condition

(31) $\varrho[\varphi_t(p),\varphi_{t'}(p)]\leqslant\varepsilon/3$ *pour tout* $p\epsilon f^{-1}(V)$ *et* $t,t'\epsilon\langle 0,1\rangle$.

D'après un théorème général de la théorie de la dimension [18]), il existe une décomposition de W en sous-ensembles fermés $W_1, W_2, ..., W_s$ satisfaisant aux conditions:

(32) $$W_{i_1}\cdot W_{i_2}\cdot...\cdot W_{i_{n+2}}=0$$

pour tout système de $n+2$ indices différents $i_1, i_2, ..., i_{n+2}$,

(33) *Si* $W_i\cdot V\neq 0$, *alors le diamètre de* W_i *est* $<\varepsilon/3$.

En outre, nous pouvons choisir les indices des ensembles $W_1, W_2, ..., W_s$ de manière qu'il existe un $\sigma\leqslant s$ tel que

(34) $W_i\cdot V\neq 0$ pour $i\leqslant\sigma$ et $W_i\cdot V=0$ pour $i>\sigma$.

Posons maintenant

(35) $$M_\nu=f^{-1}(V)+\sum_{i=\sigma+1}^{s}f^{-1}(W_i)+\sum_{(i_1,i_2,...,i_\nu)}f^{-1}(W_{i_1}\cdot W_{i_2}\cdot...\cdot W_{i_\nu}),$$

où la dernière sommation s'étend sur tous les systèmes $(i_1, i_2 ... i_{\nu-1})$ de v indices différents. Les ensembles M_ν ainsi définis sont fermés et tels que

(36) $$M_1=M,\ M_\nu\subset M_{\nu-1};\ M_{n+2}=f^{-1}(V)+\sum_{i=\sigma+1}^{s}f^{-1}(W_i).$$

[18]) Voir p. ex. K. Menger, *Dimensionstheorie*, Leipzig-Berlin 1928 p. 158.

On a en outre

$$(37) \qquad M_{\nu-1}-M_\nu=\sum_{(i_1,i_2,\dots,i_{\nu-1})}[f^{-1}(W_{i_1}\cdot W_{i_2}\cdot\dots\cdot W_{i_{\nu-1}})-M_\nu],$$

où la sommation s'étend sur tous les systèmes $(i_1,i_2,\dots,i_{\nu-1})$ de $\nu-1$ indices différents et $\leqslant\sigma$. On voit sans peine que les termes de cette somme sont disjoints deux-à-deux et que chacun d'eux est ouvert dans $M_{\nu-1}$ et sa frontière (par rapport à $M_{\nu-1}$) est contenue dans M_ν et dans chacun des ensembles $f^{-1}(M_{i_j})$, où $j=1,2,\dots,\nu-1$.

Ceci établi, posons

$$(38) \quad f_t(p)=\varphi_t(p) \quad \textit{pour tout} \quad p\in f^{-1}(V) \quad \textit{et} \quad t\in\langle 0,1\rangle,$$

$$(39) \quad f_t(p)=f(p) \quad \textit{pour tout} \quad p\in\sum_{i=\sigma+1}^{s}f^{-1}(W_i) \quad \textit{et} \quad t\in\langle 0,1\rangle.$$

Les formules (38) et (39) définissent, selon (36), une famille de fonctions $\subset W^{M_{n+2}}$ satisfaisant dans M_{n+2} aux conditions:

$$(40) \qquad f_0(p)=f(p),$$

$$(41) \qquad f_t^{-1}(V)=f^{-1}(V).$$

Remarquons, en outre que la famille $\{f_t\}$ ainsi définie dans M_{n+2} satisfait pour $\nu=n+2$ à la condition suivante:

$$(42_\nu) \quad \begin{cases} \textit{Pour tout indice } i\leqslant\sigma \textit{ l'ensemble } \sum\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}f_t[f^{-1}(W_i)\cdot M_\nu] \textit{ est} \\ \textit{contenu dans un des éléments du recouvrement } Q^{(\nu-1)}. \end{cases}$$

En effet, d'après (36) on a

$$f^{-1}(W_i)\cdot M_{n+2}=f^{-1}(W_i\cdot V)+f^{-1}\Big(W_i\cdot\sum_{j=\sigma+1}^{s}W_j\Big).$$

En tenant compte des relations (38), (31), (33) et (39), on a pour tout couple p, p' de points de $f^{-1}(W_i)\cdot M_{n+2}$ et tout couple de nombres $t,t'\in\langle 0,1\rangle$

$$\varrho[f_t(p),f_{t'}(p')]\leqslant\varrho[f_t(p),f(p)]+\varrho[f(p),f(p')]+\varrho[f(p'),f_{t'}(p')]\leqslant\varepsilon.$$

Il en résulte, d'après la définition de la constante ε, que la condition (42_{n+2}) est remplie.

Admettons, à présent, qu'on a déjà défini pour un certain naturel $\nu \leqslant n+2$ une famille de fonctions $\{f_t\} \subset W^{M_\nu}$ satisfaisant aux conditions (38), (39), (40), (41) et (42_ν). Nous allons montrer qu'on peut trouver pour les fonctions de cette famille des prolongements continus (que nous allons désigner aussi par f_t) constituant une famille $\subset W^{M_{\nu-1}}$ et satisfaisant aux conditions (38), (39), (40), (41) et $(42_{\nu-1})$.

Soit $I=(i_1, i_2, \ldots, i_{\nu-1})$ un système d'indices différents $\leqslant \sigma$ arbitrairement donné. En tenant compte de la formule (37) il suffit de prolonger f_t d'une manière convenable sur chacun des ensembles de la forme $T_I = f^{-1}(W_{i_1} \cdot W_{i_2} \ldots W_{i_{\nu-1}}) - M_\nu$. A ce but faisons correspondre au système I un de ses éléments $i(I)$. L'ensemble T_I étant ouvert dans l'ensemble fermé $M_{\nu-1}$, sa frontière F_I est égale à $\overline{T}_I - T$ et elle est contenue dans M_ν. Or les fonctions f_t sont définies dans F_I et ses valeurs appartiennent à l'ensemble des valeurs que f_t prend dans chacun des ensembles $f^{-1}(W_{i_j}) \cdot M_\nu$, où $j=1,2,\ldots,v-1$. On a en particulier

$$(43) \qquad f_t(F_I) \subset \sum_{0 \leqslant t \leqslant 1} f_t[f^{-1}(W_{i(I)}) \cdot M_\nu] \qquad \textit{pour tout} \qquad t \epsilon \langle 0,1 \rangle.$$

Or, d'après (42_ν), il existe un élément Q_I du recouvrement $Q^{(\nu-1)}$ satisfaisant à l'inclusion

$$(44) \qquad \sum_{0 \leqslant t \leqslant 1} f[f^{-1}(W_{i(I)}) \cdot M_\nu] \subset Q_I.$$

En tenant compte de (40) et (41) et en appliquant le lemme 1 du N⁰ **17** on en conclut qu'il existe pour les fonctions f_t, envisagées uniquement dans F_I, une famille de prolongements (que nous désignons aussi par $f_t) \subset Q_I^{\overline{T}_I}$ telle que $f_0(p) = f(p)$ pour tout $p \epsilon \overline{T}_I$ et $f_t^{-1}(V \cdot Q_I) = f^{-1}(V \cdot Q_I)$ pour tout $t \epsilon \langle 0,1 \rangle$.

En appliquant ce procédé à chacun des ensembles T_I, on parvient, d'après (37), à une famille de fonctions $\{f_t\} \subset W^{M_{\nu-1}}$ satisfaisant aux conditions (38), (39), (40) et (41). Il ne reste donc qu'à prouver que les fonctions f_t satisfont aussi à la

relation ($42_{\nu-1}$). Dans ce but remarquons que l'ensemble $f^{-1}(W_i)\cdot M_{\nu-1}$ est, pour tout $i\leqslant\sigma$, une somme de $f^{-1}(W_i)\cdot M_\nu$ et de $f^{-1}(W_i)\cdot\sum_I T_I$, où la sommation s'étend sur tous les systèmes $I=(i_1 i_2 \ldots i_{\nu-1})$ des $\nu-1$ indices différents $\leqslant\sigma$ tels que $f^{-1}(W_i\cdot W_{i_1}\ldots W_{i_{\nu-1}})\neq 0$. Or, d'après ($42_\nu$), il existe un élément $Q_{(i)}$ du recouvrement $Q^{(\nu-1)}$ tel que

$$\sum_{0\leqslant t\leqslant 1} f_t[f^{-1}(W_i)\cdot M_\nu]\subset Q_{(i)}. \tag{45}$$

On a, en outre, d'après la définition de f_t dans T_I l'inclusion suivante .

$$\sum_{0\leqslant t\leqslant 1} f_t(T_I)\subset Q_I. \tag{46}$$

L'ensemble $W_i\cdot W_{i_1}\ldots W_{i_{\nu-1}}$ étant non vide, on conclut de la relation (33) que le diamètre de la somme $W_i+W_{i_1}+\ldots+W_{i_{\nu-1}}$ est $<\varepsilon$. Or il existe un élément $Q'_{(i)}$ du recouvrement $Q^{(\nu-1)}$ contenant l'ensemble $W_i+W_{i_1}+\ldots+W_{i_{\nu-1}}$ tout entier. Remarquons, en outre, que les relations (44) et (45) entraînent $V\cdot W_i\subset Q_{(i)}$ et $V\cdot W_{i(I)}\subset Q_I$. Il s'ensuit que $Q'_{(i)}\cdot Q^1_{(i)}\neq 0\neq Q_I\cdot Q'_{(i)}$. Or il existe un élément du recouvrement $Q^{(\nu-2)}$ contenant tous les éléments $Q_{(i)}$ et Q_I, c. à d. la relation ($42_{\nu-1}$) est démontrée.

Nous avons ainsi prouvé que le procédé de prolongement des fonctions f_t, définies dans l'ensemble M_{n+2} par les formules (38) et (39) peut être appliqué tour-à-tour dans les ensembles $M_{n+1}, M_n, \ldots, M_1$ de manière que les conditions (40) et (41) soient remplies. L'ensemble M_1 coïcidant, d'après (36), avec M, nous parvenons de cette manière à la famille $\{f_t\}\subset W^M$ satisfaisant aux conditions (38), (40) et (41), c. à d. à la thèse du théorème 2.

19. ***Lemme 2.*** *Prémisses*: 1⁰ *f est une fonction transformant un espace M en une variété n-dimensionnelle W de manière que pour tout ensemble compact $C\subset W$ l'ensemble $f^{-1}(C)$ soit compact.*

2⁰ *A est un sous-ensemble compact de W recouvert par l'image de f d'une manière essentielle.*

Thèse: Il existe un entourage U de A (dans W) recouvert par l'image de f d'une manière essentielle.

Démonstration. Soit G un entourage de l'ensemble $f^{-1}(A)$ (dans l'espace M) tel que pour toute famille de fonctions $\{f_t\}\subset W^M$ telle que $f_0=f$ et $f_t(p)=f(p)$ pour tout $p\epsilon M-G$ et $t\epsilon\langle 0,1\rangle$ on ait $A\subset f_1(M)$. Remarquons qu'il existe un nombre $\varepsilon>0$ tel qu'on a

$$(47)\qquad \varrho(a,f(p))\geqslant\varepsilon \quad \textit{pour tout} \quad a\epsilon A \quad \textit{et} \quad p\epsilon M-G.$$

En effet, en tenant compte de ce que A est compact, on conclut que dans le cas contraire il existerait une suite $\{p_k\}\subset M-S$ et un point $a_0\epsilon A$ tel que $f(p_k)\to a_0$. Soit Q un élément n-dimensionnel constituant un entourage (dans W) de a_0. L'ensemble $f^{-1}(Q)$ étant (selon 1⁰) compact, il contient presque tous les points p_k. Or il existe une suite partielle $\{p_{k_i}\}$ convergente vers un point p_0. L'ensemble $M-G$ étant fermé, on a $p_0\epsilon M-G$. D'autre part on a $f(p_0)=\lim_{i=\infty} f(p_{k_i})=a_0\epsilon A$, c. à d. $p_0\epsilon f^{-1}(A)$, ce qui contredit l'inclusion $f^{-1}(A)\subset G$.

L'existence d'un nombre $\varepsilon>0$ satisfaisant à l'inégalité (47) ainsi établie, nous pouvons faire correspondre à tout $a\epsilon A$ un élément n-dimensionnel $Q(a)\subset W-f(M-G)$ constituant un entourage de a dans (l'espace W). En désignant par $R(a)$ l'intérieur de $Q(a)$, posons $U=\sum_{a\epsilon A} R(a)$. L'ensemble U ainsi défini constitue un entourage de A (dans W) tel que $f^{-1}(U)\cdot(M-G)=0$, c. à d. $f^{-1}(U)\subset G$. Or l'ensemble G est un entourage de $f^{-1}(U)$ dans W. Il ne reste qu'à prouver que pour toute famille $\{f_t\}\subset W^M$ satisfaisant aux conditions: $f_0=f$, $f_t(M-G)\subset W-U$ pour tout $t\epsilon\langle 0,1\rangle$, on a $U\subset f_1(M)$. Dans le cas contraire, il existerait notamment un point $b\epsilon U-f_1(M)$. Soit $b\epsilon R(a)$, où $a\epsilon A$. On voit aisément que l'ensemble $Q(a)-(b)$ se laisse transformer en la surface $S(a)=Q(a)-R(a)$ de $Q(a)$ par une déformation continue dans soi, pendant laquelle tous les points de la surface $S(a)$ restent fixes. Il en résulte, qu'il existe une déformation continue $\varphi(x,t)$ de $W-(b)$ satisfaisant aux conditions: $\varphi(x,0)=x$, $\varphi(x,t)\epsilon W$ pour tout $x\epsilon W$ et $t\epsilon\langle 0,1\rangle$, $\varphi(W,1)=W-R(a)$, $\varphi(x,t)=x$ pour tout $x\epsilon W-R(a)$ et $t\epsilon\langle 0,1\rangle$. Or, en posant

$f'_t(p)=f_{2t}(p)$ pour tout $p\epsilon M$ et $t\epsilon\langle 0,\frac{1}{2}\rangle$ et $f'_t(p)=\varphi[f_1(p), 2t-1]$ pour tout $p\epsilon M$ et $t\epsilon\langle\frac{1}{2},1\rangle$, on obtient évidemment une famille $\{f'_t\}\subset W^M$ satisfaisant aux conditions: $f'_0=f$; $f'_t(M-G)\subset W-A$ pour tout $t\epsilon\langle 0,1\rangle$ et $f'_1(M)=\varphi[f_1(M),1]\subset W-R(a)$, ce qui est impossible, car $a\epsilon A\cdot R(a)$ et l'ensemble était supposé recouvert d'une manière essentielle par l'image de la fonction f.

La démonstration du lemme 2 est ainsi terminée.

20. ***Lemme 3.*** *Toute courbe simple fermée A contenue dans une variété polyédrique (finie ou non) W se laisse transformer, pour tout $\varepsilon>0$, par une homéomorphie φ_ε, satisfaisant à l'inégalité $\varrho[\varphi_\varepsilon(x),x]<\varepsilon$ pour tout $x\epsilon A$, en une courbe simple fermée A' située dans W dans une position localement régulière.*

Démonstration. En tenant compte du fait que dans une variété de dimension $\leqslant 2$ chaque courbe simple fermée est située dans une position localement régulière (voir N⁰ 7, exemple 2) nous n'avons qu'à considérer le cas où la dimension n de W est $\geqslant 3$.

Envisageons une décomposition simpliciale T de la variété W si fine que chacun de ses simplexes soit de diamètre $<\varepsilon/6$. Or il existe un nombre positif $\eta<\varepsilon$ tel que chaque sous-ensemble de W non disjoint avec A et dont le diamètre est $<\eta$ est contenu dans l'étoile d'un sommet a de A (c. à d. dans la somme de tous les simplexes de T ayant a comme un de leurs sommets).

Soit $a_0, a_1, \ldots, a_k=a_0$ un système de $k>3$ points de A coupant A en k arcs simples $L_1, L_2, \ldots, L_k$ tels que les points a_{i-1} et a_i constituent les extrémités de l'arc L_i et que pour $i\neq j$ le diamètre de L_i soit $<\eta/3$. En faisant correspondre à tout $i=1,2,\ldots,k$ un point a'_i situé dans l'intérieur d'un simplexe n-dimensionnel de T et tel que $\varrho(a_i,a'_i)<\eta/3$, on a $\varrho(a'_{i-1},a_i)<\eta$ pour tout $i=1,2,\ldots,k$. Il en résulte que a'_{i-1} et a'_i appartiennent aux intérieurs des simplexes n-dimensionnels Δ et Δ' de T ayant un (au moins) sommet a commun. T étant une décomposition simpliciale d'une variété, il existe dans l'étoile de a un système $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_{l-1}$ ($l\geqslant -1$) de simplexes n-dimensionnels différents deux-à-deux tel que $\Delta_0=\Delta$; $\Delta_{l+1}=\Delta'$ et que

la partie commune de $\Delta_{\nu-1}$ et Δ_ν $(\nu=1,2,...,l+1)$ soit égale à un simplexe $(n-1)$-dimensionnel Λ_ν de T. En choisissant maintenant dans l'intérieur de chacun des simplexes Δ_ν un point $a_{i,\nu}$ et dans l'intérieur de chacun des simplexes Λ_ν un point $b_{i,\nu}$, posons

$$L_i'=\overline{a_i'b_{i,1}}+\sum_{\nu=1}^{l}(\overline{b_{i,\nu}a_{i,\nu}}+\overline{a_{i,\nu}b_{i,\nu+1}})+\overline{b_{i,l+1}a_{i+1}'}.$$

Les simplexes Δ_ν étant disjoints deux-à-deux, la ligne polygonale L_i' est un arc simple joignant les points a_{i-1}' et a_i' dans l'étoile du point a. Or, le diamètre de L_i' est $<\varepsilon/3$. En outre, en tenant compte de l'hypothèse que la dimension de W est $\geqslant 3$, on peut choisir les points a_i', $a_{i,\nu}$ et $b_{i,\nu}$ de façon que les lignes polygonales L_i' soient dans une „position générale", c. à d. que la partie commune de L_i' et L_j' ne contienne pour $i\neq j$ que les extrémités communes de ces arcs simples. Il en résulte que l'ensemble $A'=\sum_{i=1}^{k}L_i'$ est une courbe simple fermée. Nous allons prouver que cette courbe satisfait à la thèse du lemme.

Dans ce but définissons φ_ε dans chacun des arcs L_i comme une homéomorphie transformant L_i en L_i' de manière que $\varphi_\varepsilon(a_i)\doteq a_i'$ pour tout $i=1,2,...,k$. On obtient ainsi une homéomorphie transformant A en A'. Pour tout $x\varepsilon L_i$ la distance entre x et $\varphi_\varepsilon(x)$ ne surpasse pas la somme des diamètres de L_i et L_i' et de la distance de a_i et a_i', donc elle est $<\varepsilon$.

Il ne reste donc qu'à prouver que la position de A' dans W est topologiquement régulière. Dans ce but remarquons d'abord que la courbe A' est construite de telle façon qu'elle est disjointe avec chaque simplexe $(n-2)$-dimensionnel de la décomposition T et que pour tout simplexe n-dimensionnel Δ de T la ligne polygonale $\Delta\cdot A'$ se décompose en segments rectilignes de manière que chaque point de A' situé sur la frontière de Δ n'appartient qu'à un seul segment de cette décomposition. Soit a un point arbitraire de A'. Dans le cas où a est un point intérieur d'un simplexe n-dimensionnel Δ de T il existe dans $\Delta\cdot A'$ deux segments rectilignes $\overline{aa_0}$ et $\overline{aa_0'}$, ayant (a) comme partie commune. et un hyperplan $(n-1)$-di-

mensionnel H contenant a et coupant Δ entre a_0 et a_0'. En choisissant maintenant un simplexe $(n-1)$-dimensionnel $\Delta(a_1 a_2 \dots a_n)$ dans $H \cdot \Delta$ contenant a dans son intérieur et ayant un diamètre suffisamment petit, on constate sans peine que l'ensemble $Z = \Delta(a_0 a_1 \dots a_n) + \Delta(a_0' a_1 \dots a_n)$ satisfait aux conditions de la définition 2 du Nr 7. Dans le cas où a n'est situé dans l'intérieur d'aucun simplexe n-dimensionnel de T, il existe deux simplexes n-dimensionnels Δ et Δ' de T contigus à une face commune $(n-1)$-dimensionnelle Λ contenant a dans son intérieur et tels qu'il existe deux points $a_0 \epsilon \Delta$ et $a_0' \epsilon \Delta'$ tels que les segments $\overline{a_0 a}$ et $\overline{a_0' a}$ soient contenus dans A'. En choisissant dans Λ un simplexe $(n-1)$-dimensionnel $\Delta(a_1 a_2 \dots a_n)$ suffisamment petit et contenant a dans son intérieur, on voit aisément que l'ensemble $Z = \Delta(a_0 a_1 \dots a_n) + \Delta(a_0' a_1 \dots a_n)$ satisfait aux conditions de la définition 2 du N^0 7.

21. ***Lemme 4.*** *Prémisses:* 1^0 *A est un rétracte absolu de voisinage*[17]) *situé dans un espace arbitraire E,*

2^0 *f est une transformation continue d'un espace compact M en un sous-ensemble de E,*

3^0 *Pour tout nombre naturel n il existe un ensemble $A_n \subset E$ tel que f transforme l'ensemble $f^{-1}(A_n)$ en A_n d'une manière essentielle et qu'il existe une homéomorphie φ_n transformant A en A_n et satisfaisant à l'inégalité $\varrho[\varphi_n(x), x] \leqslant 1/n$ pour tout $x \epsilon A$.*

Thèse. La fonction f transforme l'ensemble $f^{-1}(A)$ en A d'une manière essentielle.

Démonstration. Supposons au contraire que f transforme $f^{-1}(A)$ en A d'une manière inessentielle. Il existe alors une famille $\{f_t\} \subset A^{f^{-1}(A)}$ telle que $f_0(x) = f(x)$ pour tout $x \epsilon f^{-1}(A)$ et

$$f_1[f^{-1}(A)] \neq A. \tag{48}$$

L'ensemble A étant un rétracte absolu de voisinage, il existe un prolongement continu f_0' de la fonction f_0 sur un entourage U de A dans l'espace E. On en conclut[6]) qu'il existe une famille $\{f_t'\} \subset A^U$ telle que f_t' soit un prolongement de f_t sur U pour tout $t \epsilon \langle 0, 1 \rangle$. En tenant compte de (48) on en conclut qu'il existe un entourage $U' \subset U$ de $f^{-1}(A)$ tel que

$f_1'[f^{-1}(A)] \neq A$. Or f_0' transforme U' en A d'une manière inessentielle. En tenant compte de 3⁰, on a pour tout n suffisamment grand $f^{-1}(A_n) \subset U'$, donc la fonction f_0' est définie dans l'ensemble $f^{-1}(A_n)$ en le transformant en A d'une manière inessentielle. En posant maintenant

$$f_n(x) = \varphi_n^{-1} f(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \in f^{-1}(A_n)$$

on obtient une transformation essentielle de $f^{-1}(A_n)$ en A, car f transforme $f^{-1}(A_n)$ en A_n d'une manière essentielle et φ_n^{-1} est une homéomorphie. En tenant compte de 3⁰ et de la définition de la fonction f_0' comme d'un prolongement continu de la fonction f considérée uniquement dans l'ensemble $f^{-1}(A)$, on conclut que la distance entre f_n et f_0' (considérée uniquement dans l'ensemble $f^{-1}(A_n)$) tend vers 0. Or c'est impossible, car pour tout rétracte absolu de voisinage A il existe une constante positive ε telle que pour tout espace X la distance entre deux composantes diffèrentes de l'espace A^X est toujours $\geqslant \varepsilon$[19]).

22. ***Démonstration du théorème 3.*** Soit Ω une courbe simple fermée située dans une variété polyèdrique W et soit f une fonction continue transformant un espace M en W de manière que pour tout ensemble compact $C \subset W$ l'ensemble $f^{-1}(C)$ soit compact et que la courbe Ω soit recouverte par l'image de f d'une manière essentielle. D'après le lemme du N⁰ **19** il existe un entourage U de Ω (dans W) recouvert par l'image de f d'une manière essentielle. Or, chaque entourage de Ω contenu dans U est aussi recouvert par l'image de f d'une manière essentielle. Ceci nous permet d'admettre que la fermeture $\overline{U}$ de U est compacte. L'ensemble $f^{-1}(\overline{U})$ contenant $f^{-1}(U)$ dans son intérieur, on conclut de (10) que l'ensemble U est recouvert d'une manière essentielle par l'image de la fonction f considerée uniquement dans l'ensemble compact $f^{-1}(\overline{U})$. Or, d'après le lemme 3 du N⁰ **20**, il existe pour tout

[19]) Voir ma Note „*Über eine Klasse von lokal zusammenhängenden Räumen*", Fund. Math. 19 (1932), p. 225.

nombre naturel n une homéomorphie φ_n transformant Ω en une courbe simple fermée $\Omega_n = \varphi_n(\Omega)$ située dans M dans une position localement régulière et satisfaisant à l'inégalité $\varrho[\varphi_n(x), x] \leqslant 1/n$ pour tout $x \epsilon \Omega$. Mais, d'après le théorème 1 du N⁰ **8**, la fonction f transforme l'ensemble $f^{-1}(\Omega_n)$ en Ω_n d'une manière essentielle. En tenant compte du lemme 4 du N⁰ **21** on en conclut que f transforme aussi l'ensemble $f^{-1}(\Omega)$ en Ω d'une manière essentielle. La démonstration du théorème 3 est ainsi achevée.

SUR LES COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE

Par M. Emile Cotton, Grenoble

La famille des courbes (Γ) égales à une courbe gauche donnée est déterminée par les expressions de la courbure c et de la torsion t en fonction de l'arc s de la courbe. Une certaine condition, $R=0$, doit être remplie pour que l'une des courbes (Γ) soit tout entière située sur une surface donnée (S); elle fait l'objet du présent article. En général R s'exprime avec c et ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à quatre, t et ses dérivées des trois premiers ordres (n° 1). Lorsque (S) est invariante par les transformations d'un sous-groupe du groupe des mouvements, l'ordre maximum des dérivées de c ou de t intervenant dans la relation $R=0$, s'abaisse (n° 2). La relation $R=0$ est bien connue dans le cas du plan ou de la sphère; le cas du cylindre de révolution étudié ici (n° 3) conduit à une relation qu'il serait possible d'écrire explicitement, mais qui est loin d'être aussi simple que dans les deux cas précédents. Quelques mots concernent enfin (n° 4) le système formé par deux équations $R=0$.

1. Soit $f(x,y,z)$ une fonction des trois coordonnées rectangulaires d'un point M. Lorsque M décrit une courbe (Γ), x,y,z sont fonctions de l'arc (ou abscisse curviligne) s de (Γ); et f devient une fonction de s, soit $F(s)$. Les dérivées successives de F se calculent par les formules connues de dérivation des fonctions composées, et les formules de Frenet permettent de les exprimer au moyen de x,y,z, des cosinus directeurs α,β,γ, α',β',γ' de la tangente MT et de la normale principale MN, des expressions $c(s)$, $t(s)$ de s donnant la courbure et la torsion de (Γ) en fonction de l'abscisse curviligne, et de leurs dérivées successives $c',t',c'',t'',\ldots$

Supposons maintenant (Γ) située sur la surface (S) d'équation:

(1) $$f(x,y,z)=0;$$

$F(s)$ et ses dérivées sont nulles. D'autre part, les cosinus directeurs de deux droites perpendiculaires sont fonctions de trois variables indépendantes seulement, il arrive en général que les 6 équations

(2) $$F(s)=0, \quad \frac{dF}{ds}=0, \quad \frac{d^2F}{ds^2}=0,\ldots, \quad \frac{d^5F}{ds^5}=0$$

(dont les premiers membres sont exprimés comme il a été dit plus haut) permettent de considérer x,y,z et les cosinus $\alpha,\beta,\ldots,\gamma'$ comme fonctions composées de s par l'intermédiaire de $c(s)$, $t(s)$ et de leurs dérivées c',c'',c''',t',t''. En portant ces expressions de $x,y,\ldots,\gamma'$ dans l'équation $\frac{d^6F}{ds^6}=0$, on trouve une relation

(3) $$R(c'''',c''',c'',c',c,t''',t'',t',t)=0,$$

condition nécessaire pour que (Γ) puisse être placée sur la surface (S). On peut (en supposant les données analytiques et utilisant la série de Taylor) démontrer que, parmi les courbes (Γ) dont la courbure et la torsion sont des fonctions données $c(s)$, $t(s)$ vérifiant identiquement la relation (3) (courbes égales entre elles), il en est au moins une située tout entière sur (S).

Lorsque (S) *est une surface algébrique*, les premiers membres des équations (2) sont des polynômes en $x,y,\ldots,t''$ et le premier membre de (3) est un polynôme.

Si l'on remplace l'équation (1) *de* (S) *par l'équation d'une surface égale* (S^*) *rapportée aux mêmes axes, on obtient encore la même relation* (3). Soit en effet (Γ_0) celle des courbes (Γ) qui est sur (S), déplaçons simultanément (S) et (Γ_0) de manière à faire coïncider (S) avec (S^*), (Γ_0) occupera une nouvelle position (Γ_0^*) située sur (S^*), les fonctions $c(s)$, $t(s)$ ne sont pas modifiées et ne cessent pas de vérifier la relation (3).

2. *Lorsque la surface (S) est invariante vis à vis des transformations d'un sous-groupe du groupe des mouvements*, la relation (3) est remplacée par une relation plus simple, en ce sens que les ordres des dérivées de c et de t qu'elle utilise sont inférieurs à ceux du cas général.

Considérons d'abord le cas où (S) est un plan. Une courbe plane a une torsion nulle, (3) est remplacée par $t=0$. Supposons ensuite (S) sphère de rayon $\mathbf{R}$. La relation cherchée s'obtient en exprimant que $\mathbf{R}$ est le rayon d'une sphère osculatrice à (S), ce qui donne aisément

$$c'^2+t^2c^2=\mathbf{R}^2t^2c^4.$$

Dans les exemples précédents, le sous-groupe est à trois paramètres; examinons ensuite les sous-groupes à un paramètre: *Si (S) est un cylindre* on peut partir de l'équation

$$f(x,y)=0$$

la variable z ne figurant pas, il suffit des cinq premières équations (2) pour déterminer les variables restantes; en portant dans la sixième, on a une relation de la forme

$$R(c''',c'',c',c,t'',t',t)=0. \tag{4}$$

Si (S) est une surface hélicoïdale, ou une surface de révolution, on peut, en prenant pour Oz l'axe du mouvement qui la laisse invariante, remplacer (1) par la représentation parametrique

$$x=\varrho\cos\theta, \qquad y=\varrho\sin\theta, \qquad z=g(\varrho)+h\theta, \tag{5}$$

h est une constante (nulle si la surface est de révolution).

Les cosinus directeurs de la tangente MT à une courbe de la surface sont

$$\alpha=\cos\theta\frac{d\varrho}{ds}-\varrho\sin\theta\frac{d\theta}{ds}, \quad \beta=\sin\theta\frac{d\varrho}{ds}+\varrho\cos\theta\frac{d\theta}{ds}, \quad \gamma=g'(\varrho)\frac{d\varrho}{ds}+h\frac{d\theta}{ds}.$$

Soit λ l'angle de MT et du prolongement ML du rayon du cylindre de révolution d'axe Oz passant par M

$$\cos\lambda=\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta=\frac{d\varrho}{ds};$$

la relation

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(1+g'^2)\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2+2hg'\frac{d\varrho}{ds}\frac{d\theta}{ds}+(\varrho^2+h^2)\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2=1,$$

donne ensuite $\frac{d\theta}{ds}$; α, β, γ s'expriment donc en fonction de ϱ, θ et λ. Soit de même μ l'angle que la normale principale de (Γ) fait avec ML, les relations

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \qquad \alpha' \cos\theta + \beta' \sin\theta = \cos\mu, \qquad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$$

donnent α', β', γ' en fonction de $\varrho, \theta, \lambda, \mu$.

(Géométriquement, ces derniers résultats tiennent à ce que M décrivant une hélice tracée sur (S), le plan tangent en M à (S), la droite ML, la parallèle Mz' à Oz constituent une figure de forme invariable).

Puisque x, y, z et les six cosinus sont fonctions de quatre variables seulement, et que la première des équations (2) est vérifiée identiquement, l'élimination de ces variables peut être faite entre les relations (2) et on obtient encore une relation de la forme (4).

3. Un dernier cas reste à considérer, celui où (S) *est un cylindre de révolution*; le sous-groupe est à deux paramètres. La représentation paramétrique (5) ne peut plus être utilisée, ϱ étant constant. Nous étudions ce cas par une méthode un peu différente.

Considérons un cylindre défini par un trièdre mobile de Darboux $Mxyz$, l'axe Mx étant tangent à la section droite passant en M, l'axe My la génératrice passant en ce point, l'axe Mz étant normal à la surface. En prenant pour paramètre l'abscisse curviligne u de la section droite et la distance v de M à un plan fixe perpendiculaire aux génératrices, on a, avec les notations des Chapitres I et II du livre V du tome II des *Leçons sur la Théorie des Surfaces*, de Darboux, les formules suivantes pour les translations et rotations du trièdre

$$\xi = A = 1, \quad \eta = \xi_1 = 0, \quad \eta_1 = C = 1, \quad p = q_1 = 0, \quad r = r_1 = 0,$$
$$p_1 = 1/R' = 0.$$

De plus, q est fonction de la seule variable u, et $-1/q = R$ est le rayon de courbure de la section droite.

Les formules

$$(6)\qquad \frac{du}{ds}=\cos\omega,\quad \frac{dv}{ds}=\sin\omega$$

$$(7)\qquad c\cos\overline{\omega}=-q\cos^2\omega$$

$$(8)\qquad \frac{d\omega}{ds}=c\sin\overline{\omega}$$

$$(9)\qquad \frac{d\overline{\omega}}{ds}=t+q\cos\omega\sin\omega$$

concernant une ligne (Γ) tracée sur la surface sont données par DARBOUX (*Leçons sur la Théorie des Surfaces*, t. II, tableaux II et V, p. 383, 386); ω est l'angle $\widehat{Mx,MT}$, MT étant tangente à (Γ), $\overline{\omega}=\widehat{MN,Mz}$, MN étant la normale principale; s est l'abscisse curviligne, enfin $c=1/\varrho$ et $t=1/\tau$ désignent respectivement la courbure et la torsion.

Nous les utiliserons en regardant c et t comme des fonctions données de s, ce qui détermine la courbe (Γ) à un déplacement près et permet de déterminer en fonction de s $\omega, \overline{\omega}, u, v, q$. D'une façon plus précise, en remplaçant q par sa valeur tirée de (7) dans (9), on a une équation (9′) constituant avec (8) un système d'équations différentielles que ω, $\overline{\omega}$ doivent vérifier; ayant ω, les équations (6) donnent u et v par des quadratures, et q se déduit de (7).

Géométriquement ω et $\overline{\omega}$ donnent la position du trièdre $Mxyz$ par rapport au trièdre de FRENET, l'axe My a une direction fixe dans l'espace, et engendre un cylindre (S); la section droite en est déterminée par sa courbure $(-q)$ et par son abscisse curviligne u, enfin v donne la distance de M à une section droite.

Nous aurons à utiliser une équation donnant dq/ds en fonction de q, ω, s. Pour la former on écrit d'abord:

$$(10)\qquad \left(\frac{d\overline{\omega}}{ds}-t\right)^2=q^2\sin^2\omega\cos^2\omega=-c\cos\overline{\omega}(c\cos\overline{\omega}+q)$$

en dérivant ensuite la relation (7) et éliminant ω et $d\omega/ds$ en utilisant (8) et (9), on obtient la relation suivante, cas particulier d'une équation donnée par LAGUERRE (formule 8 du tableau V des Leçons de DARBOUX):

$$(11)\qquad \cos\overline{\omega}\frac{dc}{ds}+c\sin\overline{\omega}\left(2t-3\frac{d\overline{\omega}}{ds}\right)=\frac{c\cos\overline{\omega}}{q}\frac{dq}{ds}.$$

L'élimination de $d\overline{\omega}/ds$ entre (10) et (11) conduit à l'équation cherchée que nous écrivons provisoirement

$$F\left(\frac{dq}{ds}, q, \overline{\omega}, s\right) = 0. \tag{12}$$

Si l'on obtenait q et $\overline{\omega}$ comme solutions du système différentiel (11) et (12), on aurait, ω par la relation (7). On pourrait alors trouver les valeurs initiales $s_0, \overline{\omega}_0, q_0$, de façon que la valeur correspondante de dq/ds soit nulle:

$$F(0, q_0, \overline{\omega}_0, s_0) = 0. \tag{13}$$

Cette équation donne par exemple $\overline{\omega}_0$ une fois choisis q_0 et s_0; *par suite elle détermine les cylindres passant par* (Γ) *pour lesquels, en un point donné* s_0, *le cercle osculateur à la section droite a un rayon donné et un contact du second ordre avec la section.*

Pour que la courbe (Γ) soit située sur un cylindre de révolution de rayon $\boldsymbol{R}$, il faut et il suffit évidemment que $\overline{\omega}$ étant solution de

$$F(o, -1/\boldsymbol{R}, \overline{\omega}, s) = 0 \tag{14}$$

vérifie aussi l'équation obtenue en égalant à zéro le premier membre de (11):

$$\cos\overline{\omega}\frac{dc}{ds} + c\sin\overline{\omega}\left(2t - \frac{3d\overline{\omega}}{ds}\right) = 0. \tag{15}$$

Nous simplifierons les formules qui vont suivre en supposant $\boldsymbol{R}=1$; on peut le faire sans diminuer la généralité, puisque cela revient à prendre pour unité de longueur le rayon du cylindre, ou encore à remplacer les variables anciennes

$$u, v, c, t, s$$

respectivement par

$$u' = u/\boldsymbol{R}, \quad v' = v/\boldsymbol{R}, \quad c' = \boldsymbol{R}c, \quad t' = \boldsymbol{R}t, \quad s' = s/\boldsymbol{R}$$

et à supprimer ensuite les accents; on a, maintenant $q = -1$.

Nous avons ainsi, en partant de (10),

$$(10') \qquad \left(\frac{d\overline{\omega}}{ds}-t\right)^2=c\cos\overline{\omega}(1-c\cos\overline{\omega})$$

que nous transformons en la multipliant par $9c^2\sin^2\overline{\omega}$ et remplaçant $3c\sin\overline{\omega}\frac{d\overline{\omega}}{ds}$ par sa valeur tirée de (15). Il vient

$$(16) \qquad \left(\cos\overline{\omega}\frac{dc}{ds}-ct\sin\overline{\omega}\right)^2-9c^3\sin^2\overline{\omega}\cos\overline{\omega}(1-c\cos\overline{\omega})=0;$$

c'est l'équation (14) pour $R=1$. On l'écrit encore, en prenant comme inconnue $\sigma=\operatorname{cotg}\overline{\omega}$

$$(17) \qquad G(\sigma,c',c,t)=[(1+\sigma^2)(\sigma c'-ct)^2+9c^4\sigma^2]^2-81c^6\sigma^2(1+\sigma^2)=0,$$

$$\left(c'=\frac{dc}{ds}\right).$$

L'équation (15) nous donne

$$(18) \qquad 3c\frac{d\sigma}{ds}+(c'\sigma+2ct)(1+\sigma^2)=0.$$

Nous écrirons

$$(19) \qquad G(\sigma,c',c,t)=A_0\sigma^8+A_1\sigma^7+\dots+A_8=0$$

les coefficients de ce polynôme sont fonctions composées de s par l'intermédiaire de c', c, t. Posons

$$\frac{dA_i}{ds}\doteq\frac{\partial A_i}{\partial c'}c''+\frac{\partial A_i}{\partial c}c'+\frac{\partial A_i}{\partial t}t'.$$

La dérivée $d\sigma/ds$ d'une solution de (19) est donnée par

$$\frac{\partial G}{\partial\sigma}\frac{d\sigma}{ds}+\sum_{i=0}^{8}\frac{dA_i}{ds}\sigma^{8-i}=0.$$

Remplaçons $d\sigma/ds$ par sa valeur tirée de (18), on voit que σ vérifie encore l'équation du huitième degré

$$(20) \qquad H(\sigma,c'',c',c,t',t)=3c\sum_{i=0}^{8}\frac{dA_i}{ds}\sigma^{8-i}-(1+\sigma^2)(c'\sigma+2ct)\frac{\partial G}{\partial\sigma}=0.$$

La relation cherchée est

$$(21) \qquad R(c'',c',c,t',t)=0,$$

R désignant le résultant de G et H considérés comme polynômes en σ; il est superflu de donner ici l'expression explicite du polynôme en $c'',\ldots,t$ qui constitue R.

4. Considérons deux équations du type (3)

$$(22) \qquad R(c'''',c''',c'',c',c,t''',t'',t',t)=0 \qquad R_1(c'''',\ldots,t)=0$$

concernant respectivement deux surfaces (S), (S_1). Elles constituent un système d'équations différentielles où les fonctions inconnues sont c et t; la variable indépendante s ne figure pas dans ces équations. Un tel système détermine les intersections (Γ) des surfaces égales à (S) avec les surfaces égales à (S_1). Il peut se ramener, par un procédé classique, en prenant c comme variable indépendante à un système de 6 équations donnant c' et ses dérivées t et ses dérivées en fonction de c, système complété par une septième équation donnant par une quadrature s en fonction de c. La constante additive correspondante n'intervient pas dans la forme des courbes (Γ) qui dépendent bien en définitive, dans le cas général, de six constantes arbitraires.

Si les surfaces (S) (S_1) sont égales, les deux équations (22) ne sont plus distinctes. Mais on observe que la condition $R=0$ exprime que les 7 équations en $x,y,z,\ \alpha,\ldots,\gamma'$

$$F=0,\ F'=0,\ldots,\ F^{(6)}=0$$

ont un système de solutions communes (n° 1); pour qu'il existe deux systèmes de telles solutions (correspondant à deux positions distinctes de (Γ) sur la surface (S), une seconde condition doit être remplie; elle constitue avec $R=0$ le système d'équations différentielles cherchées. Par exemple, dans le cas du n° 3, on l'obtiendrait en écrivant que les deux équations (19) (20) en σ ont deux solutions communes.

Lorsque l'une au moins des surfaces (S) (S_1) admet les transformations d'un sous-groupe du groupe des mouvements, le nombre de constantes arbitraires dont dépendent les courbes

(Γ) est inférieur à six. C'est le cas par exemple des courbes définies par $R=0$, $t=0$, ou par l'équation unique

$$(23) \qquad R(c'''', c''', c'', c', c, 0, 0, 0, 0)=0$$

correspondant aux sections planes de la surface (S) à laquelle correspond R; elles ne dépendent plus que de trois constantes arbitraires. Ce nombre se réduit encore pour les surfaces considérées aux n°s 3 et 4; ainsi, pour un cylindre de révolution, l'équation (23) est du second ordre

$$(24) \qquad R(c'', c', c, 0, 0)=0.$$

La forme des sections planes considérées (ellipses dont le demi petit axe a une longueur donnée $\boldsymbol{R}=1$), ne dépend plus que d'un paramètre. On ramènerait (24) à une équation du premier ordre en prenant c comme variable indépendante, mais les calculs du n^0 3 donnent très simplement l'intégrale de cette équation différentielle; on part de l'équation (15), où l'on fait $t=0$:

$$\cos\bar{\omega}\frac{dc}{ds} - 3c\sin\bar{\omega}\frac{d\bar{\omega}}{ds}=0,$$

les variables se séparent; on a par suite, k désignant une constante

$$c\cos^3\bar{\omega}=k^3, \qquad \cos\bar{\omega}=kc^{-\frac{1}{3}};$$

la relation (7) s'écrit, puisque $q=-1$, $c\cos\bar{\omega}=\cos^2\omega$ et

$$\cos^2\omega=kc^{\frac{2}{3}}, \qquad \sin^2\omega=1-kc^{\frac{2}{3}}.$$

On porte ces expressions des sinus et cosinus dans l'équation (9) correspondant à $t=0$, $q=-1$, ce qui donne

$$\frac{d\cos\bar{\omega}}{ds}=\sin\bar{\omega}\cos\omega\sin\omega$$

et enfin

$$(25) \qquad c'=\frac{dc}{ds}=-3c^{\frac{4}{3}}(k^{-1}-c^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}(c^{\frac{2}{3}}-k^2)^{\frac{1}{2}}.$$

L'équation intrinsèque des ellipses considérées peut s'écrire en exprimant l'arc s en fonction de $u = c^{\frac{2}{3}}$, c étant la courbure; cette expression est une intégrale elliptique

$$s = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u\sqrt{u(k^{-1} - u)(u - k^2)}}.$$

On peut évidemment obtenir cette même équation en partant de la représentation paramétrique classique

$$X = a \cos \varphi \qquad Y = \sin \varphi$$

et trouver ainsi $k = a^{-\frac{2}{3}}$ ou encore $\cos^{\frac{2}{3}} \theta$ en appelant θ l'angle du plan de l'ellipse et d'un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre de révolution.

SUR QUELQUES INTÉGRALES DU TYPE DE DINI

Par J. Marcinkiewicz, Wilno

1. Soit donnée une fonction $F(x)$ de période 2π. Posons

(1.1) $$\Delta(F,x,h)=\Delta(x,h)=F(x+h)+F(x-h)-2F(x).$$

Lorsque la fonction F admet une dérivée f assez régulière, par exemple lorsque f vérifie la condition de Lipschitz d'ordre positif, on a pour tout x

(1.2) $$\int_0^{2\pi}|\Delta(x,t)|^r t^{-r-1}dt<\infty,\quad r\geqslant 1.$$

Au contraire, si l'on suppose seulement l'existence de la dérivée $f(x)$ dans un point particulier, l'intégrale (1.2) peut être divergente en ce point. Cependant on a le

Théorème 1. *Soit F continue, dérivable dans un ensemble E de mesure positive. L'intégrale* (1.2) *existe pour tout $r\geqslant 2$ presque partout dans E. Pour $r<2$, le théorème tombe en défaut.*

Supposons que la fonction F est absolument continue et que sa dérivée $f\epsilon L^q$ $(q\geqslant 2)$. D'après le théorème 1 l'intégrale (1.2) avec $r=q$ définit une fonction de x. On peut demander quel est l'ordre de grandeur de la fonction ainsi définie. On y a le

Théorème 2. *Lorsque F est absolument continue et $F'=f\epsilon L^q$, on a*

(1.3) $$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\Delta(x,t)|^q t^{-q-1}dt\leqslant C_q\int_0^{2\pi}|f|^q dt.$$

On a aussi un théorème réciproque dans un sens au théorème 2:

Théorème 3. *Soit F une fonction absolument continue $F(0)=F(2\pi)$, $1<p\leqslant 2$, $f=F'$. On a*

$$\int_0^{2\pi} |f|^p dx \leqslant C_p \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\Delta(x,t)|^p t^{-p-1} dx\, dt. \tag{1.4}$$

2. Nous commençons par la démonstration du

Lemme 1. *Les théorèmes 1, 2, 3 sont vrais lorsque F est absolument continue, $F(0)=F(2\pi)$, $F'\varepsilon L^2$ et $r=2$.*

Posons

$$F'(x)=f(x)=\sum_1^\infty (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

On a

$$\Delta(x,t)=-4\sum_1^\infty \left(\frac{a_k \sin kx - b_k \cos kx}{k}\right)\sin^2\frac{kt}{2}.$$

L'égalité de Parcéval donne

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta^2(x,t)\,dx = 16\sum_1^\infty (a_k^2+b_k^2)\frac{\sin^4 kt/2}{k^2}.$$

En multipliant les deux membres de la dernière égalité par t^{-3} et en intégrant dans l'intervalle, $(0,2\pi)$ on obtient

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta^3(x,t)\,t^{-3}\,dx\,dt = 16\sum_1^\infty (a_k^2+b_k^2)\int_0^{2\pi}\frac{\sin^4 kt/2}{k^2t^3}\,dt,$$

ce qui implique le résultat demandé.

3. Dans une autre note[1]) j'ai démontré le

Lemme 2. *Soit F une fonction continue, dérivable dans un ensemble E de mesure positive. Pour tout $\varepsilon>0$ on peut définir un ensemble $Q\subset E$ et deux fonctions $G(x)$ et $H(x)$ de période 2π de sorte que l'on ait*

---

[1]) Marcinkiewicz 2.

$$(3.1) \qquad |E-Q|<\varepsilon,$$

$$(3.2) \qquad G(0)=G(2\pi), \quad G(x)=\int_0^x g(x)dx, \quad g\epsilon L^2,$$

$$(3.3) \qquad G(x)=F(x), \qquad (x\epsilon Q),$$

$$(3.4) \qquad F(x)=G(x)+H(x),$$

et enfin pour presque tout $x\epsilon Q$

$$(3.5) \qquad \int_{-\pi}^{\pi}|H(x+t)|t^{-2}dt<\infty.$$

4. Nous allons démontrer le théorème 1 avec $r=2$. Fixons ε positif et considérons l'ensemble Q et les fonctions G et H satisfaisant aux conditions (3.1)–(3.5). En tenant compte de (3.2) et du lemme 1, on conclut que l'intégrale

$$(4.1) \qquad \int_0^{2\pi}\Delta^2(G,x,t)t^{-3}dt$$

existe presque partout dans l'intervalle $(0,2\pi)$. D'autre part, les formules (3.3) et (3.4) montrent qu'on a presque partout dans Q

$$H(x)=0, \quad H'(x)=0,$$

ce qui montre en vertu de (3.5) que l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi}H^2(x+t)t^{-3}dt$$

existe presque partout dans Q. Or, l'existence de la dernière intégrale implique évidemment

$$(4.2) \qquad \int_0^{2\pi}\Delta^2(H,x,t)t^{-3}dt<\infty.$$

En tenant compte de (4.1) et (4.2), on conclut facilement qu'on a presque partout dans Q

$$(4.3) \qquad \int_0^{2\pi}\Delta^2(F,x,t)t^{-3}dt<\infty.$$

Or, ε étant arbitraire, il s'ensuit d'après (3.1) que l'inégalité (4.3) subsiste presque partout dans l'ensemble E.

Remarquons enfin que l'inégalité (4.3) entraîne (1.2) avec $r \geqslant 2$ dès que la fonction F admet une dérivée finie.

5. Pour démontrer la partie négative du théorème 1, posons

$$a_n = 1/\sqrt{n}\log n.$$

On a

$$\sum a_n^2 < \infty, \qquad \sum a_n^p = \infty, \qquad 1 \leqslant p < 2. \tag{5.1}$$

Soit

$$f(x) = \sum_2^\infty a_n \cos n! x, \qquad F(x) = \sum_2^\infty \frac{a_n}{n!} \sin n! x. \tag{5.2}$$

D'après (5.1) on a $f \in L^2$. D'autre part

$$\Delta(F, x, t) = -4 \sum \frac{a_n}{n!} \sin n! x \sin^2 n! \frac{t}{2} \tag{5.3}$$

$$|\tfrac{1}{4}\Delta(x,t)| \geqslant \frac{a_m}{m!}\, |\sin m! x| \sin^2 m! \frac{t}{2} - \sum_2^{m-1} \frac{a_m}{n!} |\sin n! x| \sin^2 n! \frac{t}{2}.$$

$$- \sum_{m+1}^\infty \frac{a_n}{n!} |\sin n! x| = A_m - B_m - C_m$$

$$3|\Delta|^p \geqslant A_m^p - 3B_m^p - 3C_m^p$$

$$\int_0^{2\pi} |\Delta(x,t)|^p t^{-p-1} dt \geqslant \sum_m \int_{1/m!}^{2/m!} |\Delta(x,t)|^p t^{-p-1} dt \geqslant$$

$$\geqslant \tfrac{1}{3} \sum_m \int_{1/m!}^{2/m!} A_m^p t^{-p-1} dt - \sum_m \int_{1/m!}^{2/m!} B_m^p t^{-p-1} dt$$

$$- \sum_m \int_{1/m!}^{2/m!} C_m^p t^{-p-1} dt = \sum_m \{I_1^{(m)} - I_2^{(m)} - I_3^{(m)}\}.$$

On a

$$I_1^{(m)} = \frac{1}{3m!^p} |\sin m! x|^p a_m^p \int_{1/m!}^{2/m!} \sin^{2p} m! \frac{t}{2} t^{-p-1} dt \geqslant \tfrac{1}{3} \lambda a_m^p |\sin m! x|^2 \tag{5.4}$$

où

$$\lambda=\int_{1/2}^{1}\sin^{2p}t\,t^{-3}dt.$$

Or, comme

$$I_2\leqslant 4\left\{\frac{(m-1)!}{\sqrt{m}}\right\}^p\int_{1/m!}^{2/m!}t^{-1+p}dt$$

ou bien

(5.5) $$I_2\leqslant 4m^{-3/2}$$

et

(5.6) $$I_3\leqslant\int_{1/m!}^{2/m!}\left[\frac{4}{\sqrt{m}\,(m+1)!}\right]^p t^{-p-1}dt\leqslant cm^{-3/2}.$$

Les inégalités (5.4), (5.5) et (5.6) donnent

$$\int_0^{2\pi}\Delta^p(x,t)t^{-p-1}dt\geqslant\sum_m\lambda\sin^2 m!x\,a_m^p-C\sum_m m^{-3/2}$$

et tout revient à démontrer que l'on a presque partout

(5.7) $$\sum a_m^p\sin^2 m!x=\infty,$$

ce qui résulte facilement de l'inégalité (5.1) et du fait bien connu [2]) qu'une série

$$\sum c_\nu\cos\lambda_\nu x,\qquad \lambda_{\nu+1}/\lambda_\nu>2,\qquad \sum c_\nu^2<\infty$$

converge presque partout.

6. Le théorème 2 est une conséquence facile du théorème sur la convexité des normes des opérations linéaires de M. M. Riesz [2bis]). L'expression $U(f,x,h)=\Delta(F,x,h)h^{-1}$, $(F'=f)$, considérée pour $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, $0\leqslant h<2\pi$, est une opération linéaire. D'après le lemme 1, on voit que

(6.1) $$\left[\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{2\pi}u^2(f,x,t)\,dx\,d\log t^{-1}\right]^{1/2}\leqslant C_2\left[\int_0^{2\pi}f^2dx\right]^{1/2}$$

avec C_2 indépendant de ε.

---

[2]) Zygmund 5, [2bis]) Riesz 3.

D'autre part, lorsque la fonction f est bornée, la fonction U l'est aussi et on a

(6.2) $$\lim_{r\to\infty}\left\{\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{2\pi}|U^r(f,x,t)|\,dx\,d\log t^{-1}\right\}^{1/r}\leqslant 2\max|f|.$$

L'opération U étant définie pour $f\epsilon L^2$ et $f\epsilon L^\infty$, elle peut être aussi définie pour tout r, $2\leqslant r\leqslant\infty$. On a donc

(6.3) $$\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{2\pi}U^r(f,x,t)t^{-r-1}\,dx\,dt\leqslant C_r\int_0^1|f|^r dx.$$

C_r étant indépendant de ε, on en déduit le résultat demandé.

7. La démonstration du théorème 3 est basée sur le suivant

Lemme 3. *Soient*

(7.1) $$f=\sum_1^\infty(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\qquad f\epsilon L^p,\qquad p>1.$$
$$\Delta_\nu(f,x)=\Delta_\nu(x)=\sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-1}(a_i\cos ix+b_i\sin ix).$$

On a

(7.2) $$A_p\int_0^{2\pi}(\sum_\nu\Delta_\nu^2)^{p/2}dx\leqslant\int_0^1|f|^p dx\leqslant B_p\int_0^{2\pi}(\sum_\nu\Delta_\nu^2)^{p/2}$$

Ce résultat est connu, il est dû à MM. J. LITTLEWOOD et R. PALEY [3]).

Nous utilisons encore le

Lemme 4. *On a pour tout polynôme trigonométrique S d'ordre n au plus*

(7.3) $$\int_0^{2\pi}|S'|^p dx\leqslant n^p\int_0^{2\pi}|S|^p dx.$$

Ce lemme est aussi connu, il est dû à M. A. ZYGMUND [4]).

Enfin nous appliquons le

---

[3]) Littlewood et Paley 1.

[4]) Zygmund 6.

Lemme 5. Soit

$$f(x)=a_0/2+\sum_1^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

$$s_n=a_0/2+\sum_1^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

$$f\epsilon L^p, \quad p>1.$$

On a

$$(7.4)\qquad \int_0^{2\pi}|S_n|^p dx\leqslant A_p\int_0^{2\pi}|f|^p dx.$$

Ce résultat est dû à M. M. RIESZ [5]).

8. Nous allons maintenant démontrer le théorème 3. D'après le lemme 3, on a

$$\int_0^{2\pi}\Delta^p(F,x,t)dx\geqslant\int_0^{2\pi}(\Sigma\Delta_\nu^2(\Delta,x,t))^{p/2}dx$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta^p(F,x,t)t^{-p-1}\geqslant\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\Sigma\Delta_\nu^2)^{p/2}dx\,dt\geqslant$$

$$\sum_\nu\int_0^{2\pi}dx\int_{2^{-\nu-1}}^{2^{-\nu}}\Delta_\nu^p t^{-p-1}dx\,dt$$

ou bien

$$(8.1)\qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta^p(F,x,t)t^{-p-1}dx\,dt\geqslant\int_0^{2\pi}dx\,\Sigma 2^p\int_{2^{-\nu-1}}^{2^{-\nu}}\Delta_\nu^p(\Delta,x,\theta_\nu),$$

où

$$2^{-\nu-1}\leqslant\theta_\nu\leqslant 2^{-\nu}.$$

On a

$$\Delta_\nu(\Delta,x,\theta_\nu)=\sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-1}\frac{a_\mu\sin\mu x-b_\mu\cos\mu x}{\mu}\sin^2\mu\frac{\theta_\mu}{2}.$$

Lorsque μ croît de 2^ν jusqu'à $2^{\nu+1}$, l'expression $\mu\theta_\nu/2$ croît aussi de $2^{\nu-1}\theta_\nu$ jusqu'à $2^\nu\theta_\nu$ et l'on a

$$\tfrac{1}{4}\leqslant\mu\theta_\nu\leqslant 1.$$

---

[5]) Riesz 4.

Posons $\sin^2 \mu\theta_\nu/2 = \lambda_\mu$. La suite λ_μ est donc croissante et l'on a pour $2^\nu \leqslant \mu \leqslant 2^{\nu+1}$, $\sin^2 \frac{1}{4} \leqslant \lambda_\mu \leqslant \sin^2 1$.

Posons

$$\sum_{2^\nu}^{n} \frac{a_\mu \sin \mu x - b_\mu \cos \mu x}{\mu} \lambda_\mu = s_n; \quad \sum_{2^\nu}^{n} \frac{a_\mu \sin \mu x - b_\mu \cos \mu x}{\mu} = \sigma_n.$$

En appliquant la transformation d'Abel et l'inégalité de Minkowski, on trouve

$$\sigma_{2^{\nu+1}-1} = \sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-2} s_\mu \left(\frac{1}{\lambda_\mu} - \frac{1}{\lambda_{\mu+1}}\right) + S_{2^{\nu+1}-1}/\lambda_{2^{\nu+1}-1}$$

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_{2^{\nu+1}-1}|^p dx \leqslant \sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-2} \left(\frac{1}{\lambda_\mu} - \frac{1}{\lambda_{\mu+1}}\right) \left\{\int_0^{2\pi} |s_\mu|^p dx\right\}^{1/p} +$$

$$+ \lambda_{2^{\nu+1}-1}^{-1} \left\{\int_0^{2\pi} |s_{2^{\nu+1}-1}|^p dx\right\}^{1/p}.$$

L'inégalité (7.4) donne

$$\left[\int_0^1 |s_\mu|^p dx\right]^{1/p} \leqslant A_p \left\{\int_0^1 |\Delta_\nu|^p dx\right\}^{1/p},$$

ce qui porté dans (8.1) donne

$$(8.2) \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta^p(F,x,t) t^{-p-1} dt \geqslant A \Sigma 2^{\nu p} \int_0 |\sigma_{2^{\nu+1}-1}|^p dx,$$

où A désigne une constante positive. D'autre part, l'inégalité (7.3) donne

$$\int_0^{2\pi} |\Delta_\nu(f,x)|^p dx \leqslant 2^{(\nu+1)p} \int_0^1 |\sigma_{2^\nu-1-1}|^p dx,$$

ou bien en vertu de (8.2)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\Delta(F,x,t)^p t^{-p-1} dx\, dt \geqslant A \sum \int_0^{2\pi} |\Delta_\nu^p| dx \geqslant A \int_0^{2\pi} (\Sigma \Delta_\nu^2)^{p/2} dx,$$

ce qui, d'après (7.2), achève la démonstration du théorème 3.

9. Il est très probable que le théorème suivant subsiste. Soit $F(x)$ absolument continue, $F(0)=F(2\pi), F'=f$. Posons

$$g^2(x)=\int_0^{2\pi} \Delta^2(F,x,t)t^{-3}dt.$$

On a pour tout $p>1$

$$A_p\int_0^{2\pi} g^p dx\leqslant\int_0^{2\pi} |f|^p dx\leqslant B_p\int_0^{2\pi} g^p dx.$$

Si ce théorème est vrai, sa démonstration est probablement beaucoup plus difficile.

TRAVAUX CITÉS.

1. J. Littlewood et R. Paley, *Theorems on Fourier series and power series I*, Journ. Lond. Math. Soc. 6 (1931), p. 320-233., II Proc. Lond. Math. Soc. 42 (1936), p. 52-85, III Proc. Lond. Math. Soc. 43 (1937), p. 105-126.

2. J. Marcinkiewicz, *On the convergence of Fourier Series*, Journ. Lond. Math. Soc. 10 (1935), p. 264-268.

3. M. Riesz, *Sur les maximas des formes billinéaires*, Acta Math. 49 (1926), p. 465-497.

4. M. Riesz, *Sur les fonctions conjuguées*, Math. Zeit 27 (1927), p. 218-244.

5. A. Zygmund, *On the convergence of lacunary trigonometric series*, Fund. Math. 16 (1930), p. 90-107.

6. A. Zygmund, *A remark on conjugate series*, Proc. Lond. Math. Soc. 34 (1932), p. 392-400.

QUELQUES THÉORÈMES SUR LES SÉRIES ORTHOGONALES LACUNAIRES

Par J. Marcinkiewicz, Wilno

1. Dans une note récente[1]) j'ai démontré le

Théorème 1. *Soit* $\{\varphi_n\}$ *un système orthogonal et normal dans l'intervalle* (0,1) *vérifiant la condition*

$$(1.1) \qquad \limsup_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x)|\, dx > 0.$$

Il existe une suite $\{n_i\}$ *telle que la convergence presque partout d'une série de la forme*

$$(1.2) \qquad \sum_i a_i \varphi_{n_i}(x)$$

équivaut à l'inégalité

$$(1.3) \qquad \sum a_i^2 < \infty.$$

Dans une autre note[2]) j'ai amélioré une partie de ce théorème en démontrant le

Théorème 2. *Sous la condition* (1.1) *il existe une suite* $\{n_i\}$ *telle que la relation*

$$(1.4) \qquad \liminf_{n\to\infty} \sum_1^{n_\nu} a_i \varphi_{n_i}(x) > -\infty$$

verifiée presque partout entraîne (1.3).

---

[1]) Marcinkiewicz 2, *cf.* aussi Marcinkiewicz 3 et Menchoff 5 et 6.
[2]) Marcinkiewicz 4.

La démonstration que j'ai donné pour ces théorèmes est très longue. Le but de cette note est de les démontrer d'une façon plus courte et plus simple. Ma nouvelle démonstration sera basée sur le

Théorème 3. *Sous la condition* (1.1) *il existe une suite* $\{n_i\}$ *telle que l'on a pour des nombres* $a_1, a_2, a_3, \dots$ *arbitraires*

$$(1.5)\qquad A\Big(\sum_1^n a_n^2\Big)^{p/2} \leqslant \int_0^1 \Big|\sum_1^n a_\nu \varphi_{n_\nu}(x)\Big|^p dx \leqslant \Big(\sum_1^n a_\nu^2\Big)^{p/2} \qquad (0<p\leqslant 2),$$

où A *désigne une constante positive* [3]).

2\. ***Lemme 1.*** *Soient* $\{\omega_\nu\}$ *le système orthogonal et normal de M.* ***Walsh*** [4]), $\{n_i\}$ *une suite de nombres entiers telle que*

$$(2.1)\qquad n_{i+1}/n_i \geqslant 2$$

et f

$$(2.2)\qquad f = \sum c_\nu \omega_\nu$$

une fonction de la classe L^p $(p>1)$.

La série

$$(2.3)\qquad \sum_\nu \Delta_\nu; \qquad \Delta_\nu = \sum_{2^\nu-1}^{2^\nu+1} c_\mu \omega_\mu$$

converge presque partout et on a l'inégalité

$$(2.4)\qquad A_p \int_0^1 (\Sigma \Delta_\nu^2)^{p/2} dx \leqslant \int_0^1 |f|^p dx \leqslant B_p \int_0^1 (\Sigma \Delta_\nu^2)^{p/2}$$

où $A_p > A$ *dès que* $\frac{3}{2} \leqslant p \leqslant 2$.

Ce résultat est connu, il est dû à R. Paley [5]).

3\. ***Lemme 2.*** *Soit*

$$(3.1)\qquad \int_0^1 |\psi_\nu|\, dx > \Delta, \qquad \int_0^1 \psi_\nu^2 dx < 1.$$

---

[3]) Une inégalité analogue pour $p \geqslant 2$ a été considerée par M. S. Banach. Voir Banach 1.

[4]) Walsh 8. [5]) Paley 7.

On a pour toute suite $\{a_\nu\}$ *et tout* $p \leqslant 2$

$$(3.2) \qquad (\sum a_\nu^2)^{p/2} \leqslant 4\Delta^{-2} \int_0^1 (\Sigma a_\nu^2 \psi_\nu^2)^{p/2}.$$

Nous pouvons supposer évidemment $\sum a_\nu^2 = 1$. Posons $\sigma^2 = \sum a_\nu^2 \psi_\nu^2$ et désignons par A et B les ensembles dans lesquels on a réspectivement $\sigma \geqslant 1$ et $\sigma \leqslant 1$. On a tantôt $|A| \geqslant \Delta^2/4$ tantôt $|A| \leqslant \Delta^2/4$. Le premier cas est banal. Dans le deuxième on a

$$\int_0^1 |\psi_\nu| dx \leqslant \Big\{ \int_B \psi_\nu^2 dx \Big\}^{1/2} + |A|^{1/2},$$

d'où l'on déduit

$$\int_B \psi_\nu^2 dx \geqslant \Delta^2/4,$$

$$\int_0^1 \sigma^{p/2} dx \geqslant \int_B \sigma^{p/2} dx \geqslant \int_B \sigma^2 dx \geqslant \sum a_\nu^2 \int_B \psi_\nu^2 dx \geqslant \Delta^2/4,$$

ce qui démontre le lemme.

Maintenant nous pouvons démontrer le théorème 3. En changeant les notations, on peut admettre que l'on a

$$(3.3) \qquad \int_0^1 |\varphi_\nu| dx \geqslant 2\Delta.$$

Soit

$$\varphi_\nu = \sum a_{\nu,\mu} \omega_\mu.$$

Posons $m_0 = 0$, $n_1 = 1$ et désignons par m_1 un nombre satisfaisant à la condition

$$(3.4) \qquad \sum_{n_1}^{\infty} a_{1,\mu}^2 \leqslant \Delta^4/4.$$

Supposons $n_1, n_2, \ldots, n_k$ et $m_1, m_2, \ldots, m_k$ définis. Choisissons pour n_{k+1} un nombre assez grand pour que l'on ait

$$(3.5) \qquad \sum_1^{m_k} |a_{n_{k+1},\mu}| < [A_p \Delta^2]^{2/p}/4^k, \qquad n_{k+1} > n_k$$

et ensuite pour m_{k+1} un nombre satisfaisant aux inégalités

$$(3.6) \qquad m_{k+1} > 2m_k; \qquad \sum_{m_{k+1}}^{\infty} a_{n_{k+1},\mu}^2 \leqslant [A_p \Delta^2]^{2/p} / 4^{k+1}.$$

On a

$$\varphi_{n_\nu}(x)=\sum_{1}^{m_{\nu-1}} a_{n_\nu,\mu}\omega_\mu+\sum_{m_{\nu-1}+1}^{m_\nu} a_{n_\nu,\mu}\omega_\mu+\sum_{m_\nu+1}^{\infty} a_{n_\nu,\mu}\omega_\mu=\varepsilon_\nu+\psi_\nu+\varrho_\nu,$$

où

$$(3.7)\qquad |\varepsilon_\nu|\leqslant\frac{A\Delta^2}{16}2^{-\nu};\qquad \int_0^1 \varrho_\nu^2 dx\leqslant\Delta^2 4^{-\nu};\qquad \int_0^1 |\psi_\nu| dx>\Delta.$$

Soit $^3/_2\leqslant p\leqslant 2$. On a

$$\Big\{\int_0^1 |\sum_1^n a_\nu\varphi_{n_\nu}|^p dx\Big\}^{1/p}\geqslant$$

$$\geqslant\Big\{\int_0^1 |\sum_1^n a_\nu\psi_\nu|^p dx\Big\}^{1/p}-\Big\{\int_0^1 |\sum_1^n a_\nu\varepsilon_\nu|^p dx\Big\}^{1/p}-\Big\{\int_0^1 |\sum_1^n a_\nu\varrho_\nu|^p dx\Big\}^{1/p}=I_1-I_2-I_3.$$

D'après (2.4) et (3.2), on a $I_1^p\geqslant\frac{1}{4}A_p\Delta^2 s^{p/2}$ où $s=\sum a_\nu^2$. L'inégalité (3.7) donne $I_2\leqslant[A_p\Delta^2]^{1/p}s^{1/2}/16$ et $I_3^p\leqslant A_p\Delta^2 s^{p/2}/16$, ce qui entraîne

$$\Big\{\int_0^1 |\sum a_i\varphi_{n_i}|^p dx\Big\}^{1/p}\geqslant cs^{1/2}.$$

Le théorème se trouve démontré pour $\frac{3}{2}\leqslant p\leqslant 2$. Soit donc $p<\frac{3}{2}$. Désignons par A et B les ensembles où $\sum a_\nu^2\varphi_{n_\nu}^2(x)\geqslant 1$ et $\sum a_\nu^2\varphi_{n_\nu}^2(x)\leqslant 1$. Lorsque $|A|>\mu$, on a $\int_0^1 \sigma^{p/2}dx\geqslant\mu$ $(\sigma=\sum a_\nu^2\varphi_{n_\nu}^2)$. Dans le cas contraire, on trouve

$$\int_0^1 \sigma^{3/4}dx=\int_A+\int_B\leqslant\mu^{1/4}+\int_B \sigma^{p/2}dx;\qquad \int_0^1 \sigma^{3/4}dx\geqslant C,$$

d'où

$$\int_0^1 \sigma^{p/2}dx\geqslant C-\mu^{1/4}\geqslant c/2$$

et il en vient dans tous les cas

$$\int_0^1 \sigma^{p/2}dx\geqslant c/2.$$

L'inégalité $\int_0^1 \sigma^{p/2} dx \leqslant 1$ étant évidente, il en résulte le théorème. En s'appuyant sur ce résultat, on peut démontrer le

Théorème 4. *Sous la condition* (1.1), *on peut choisir une suite* $\{\varphi_{n_\nu}\}$ *telle que l'on ait pour toute suite* $\{a_i\}$ *et tout ensemble* A, $|A|>1-\varepsilon_p$

$$\int_A |\sum a_i \varphi_{n_i}|^p dx \geqslant C_p (\sum a_\nu^2)^{p/2}. \tag{3.8}$$

En effet, en supposant l'inégalité (1.4), on a

$$\int_A |\sum a_i \varphi_{n_i}|^p dx = \int_0^1 - \int_{CA} \geqslant A_p(\sum a_i^2) - |CA|^{2-p/p} (\sum a_i^2)^{p/2}.$$

4. Maintenant nous pouvons démontrer le théorème 2. Soient $\{\varphi_{n_i}\}$ les fonctions choisies dans le théorème 3. Supposons (1.4) verifiée et

$$\sum a_i^2 = \infty.$$

Il existe un nombre M tel que la relation

$$\sum_1^\nu a_i \varphi_{n_i}(x) > -M \qquad \nu = 1, 2, ..$$

est vérifiée dans un ensemble E, $|CE|<\varepsilon_1$, ε_1 étant le même que dans le théorème 4. On a [6])

$$\int_E |S_\nu| dx \leqslant \int_E |S_\nu + M| + M \leqslant \int_E S_\nu + 2M = 2M + \sum_1^\nu a_i \xi_i$$

où $S_\nu = \sum_1^\nu a_i \varphi_{n_i}$, $\xi_i \doteq \int_E \varphi_{n_i}(x)\, dx$.

Or, de la relation $\sum \xi_i^2 \leqslant 1$ on conclut facilement que

$$\int_E |S_\nu|\, dx = O(\sum_1^\nu a_i^2)^{1/2},$$

ce qui est en contradiction avec (3.8).

---

[6]) Comparer Zygmund 9.

Le théorème 1 résulte du théorème 2 et du lemme 1. En effet, le théorème 2 montre que (1.2) entraîne (1.3). D'autre part, posons comme dans le lemme 2 $\varphi_{n_\nu}=\varepsilon_\nu+\psi_\nu+\varrho_\nu$. L'inégalité (1.3) entraîne

$$\sum a_i\varphi_{n_i}\epsilon L^2,$$

d'où résulte d'après le lemme 1 la convergence presque partout de la série

$$\sum a_\nu\psi_\nu.$$

La convergence de la série $\sum a_\nu\varepsilon_\nu$ étant évidente, il reste à démontrer la convergence de la série $\sum a_\nu\varrho_\nu$, mais elle résulte immediatement de la relation

$$\sum\int_0^1|a_\nu\varrho_\nu|\,dx<\infty.$$

TRAVAUX CITÉS.

1. S. Banach, *Sur les séries lacunaires*. Bull. Ac. Pol. 1933, p. 149-154.

2. J. Marcinkiewicz, *Sur les séries lacunaires*, Stud. Math. 8.

3. J. Marcinkiewicz, *Sur la convergence de séries orthogonales*, Stud. Math. 6 (1936), p. 39-45.

4. J. Marcinkiewicz, *Quelques théorèmes sur les séries orthogonales*, Ann. Soc. Math. Pol. 16 (1937), p. 84-96.

5. A. Menchoff, *Sur la convergence et la sommation des séries orthogonales*, Bull. Soc. Math. France 64 (1937), p. 1-24.

6. A. Menchoff, *Sur la sommation des série othogonales par les méthodes linéaires* (en russe) Bull. Ac. Sc. U. R. S. S. (1937), p. 203-229.

7. R. Paley, *A remarkable series of orthogonal functions I*, Proc. Lond. Math. Soc. 34 (1932), p. 241-264.

8. J. Walsh, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*, Math. Ann. 69 (1910), p. 331-371.

9. A. Zygmund, *On lacunary trigonometric series*, Trans. Americ. Math. Soc. 34 (1932), p. 435-446.

BINÄRE MATRIZENFORMELN FÜR DIE CLIFFORD-ZAHLEN[1])

Von Duwid Wajnsztejn, Kraków

1. Wie bewusst gibt es binäre (komplexe) Matrizen, die als Formerln für die Quaternionen gelten dürfen[2]). Es entsteht die Frage:

Darf man für die Clifford-Zahlen mit 2^n Einheiten binäre Matrizenformeln im Gebiet der Clifford-Zahlen mit 2^{n-1} Einheiten bauen?

Dieser Frage, *die zu bejahen ist*, widmen wir die Note. In unseren Erwägungen benützen wir die Resultate aus unseren Noten:

[I] *Über die Clifford-Lipschitzschen hyperkomplexen Zahlensysteme* [3]).

[II] *a-Matrizen und Clifford-Zahlen* [4]).

Diese Noten werden im weiteren mit den Zeichen [I] bzw. [II] zittiert sein. Wir behalten alle Bezeichnungen aus diesen Noten.

2. In [I]. § 4. haben wir einen hyperkomplexen Zahlensystem mit 2^n Einheiten

(1) $$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_{2^n}$$

untersucht.

Statt der Einheiten (1) darf man 2^n Clifford-Zahlen

(2) $$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2^n}$$

---

[1]) Diese Note wurde im Seminär des Herrn Prof. Dr W. Wilkosz verfertigt.

[2]) F. Klein: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jhd.* I. S. 190.

[3]) Annales de la Société Polonaise de Mathématique T. XVI [1937], S. 65-83.

[4]) Ann. de la Soc. Pol. de Math. T. XVI [1937], S. 162-175.

als Grundeinheiten wählen [5]), wo

$$(3)\quad \begin{aligned} \eta_1 &= a_{1,1} E_1 + a_{1,2} E_2 + \ldots + a_{1,2^n} E_{2^n} \\ \eta_2 &= a_{2,1} E_1 + a_{2,2} E_2 + \ldots + a_{2,2^n} E_{2^n} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_{2^n} &= a_{2^n,1} E_1 + a_{2^n,2} E_2 + \ldots + a_{2^n,2^n} E_{2^n} \end{aligned}$$

(a_{ik} reell) mit der Bedingung:

$$(4)\quad \mathrm{Det}\ \|a_{i,k}\| \neq 0.$$

Auf Grund der Multiplikationstafel [I] (30) und der Formel [I] (47) haben wir

$$E_i^2 = \pm E_1.$$

Wir wählen als neue Grundeinheiten (2) die Clifford-Zahlen

$$(5)\quad \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3, \ldots, \mathfrak{e}_{2^n}$$

für welche die Zahlen a_{ik} aus (3) durch die Formeln

$$a_{i,k} = 0 \text{ für } i \neq k$$

$$a_{ii} = \begin{cases} +1 \text{ für } E_i^2 = E_1 \\ -1 \text{ für } E_i^2 = -E_1 \end{cases}$$

bestimmt sind.

Wir haben die Formel

$$(7)\quad \mathfrak{e}_i = E_i^3.$$

Man sieht leicht ein, dass man für die Einheiten (5) eine Multiplikationstafel auf folgender Weise erhält:

Man bildet eine α-Matrix $\mathfrak{E}$, die in der ersten Kolonne die Einheiten (5) besitzt. Links der Matrix schreiben wir die erste Kolonne und über der Matrix schreiben wir die erste Zeile, so erhalten wir eine Multiplikationstafel für die Einheiten (5):

(8)

	$\mathfrak{e}_1$	$-\mathfrak{e}_2$	$\ldots$	$-\mathfrak{e}_{2^n}$
$\mathfrak{e}_1$	$\mathfrak{e}_1$	$-\mathfrak{e}_2$	$\ldots$	$-\mathfrak{e}_{2^n}$
$\mathfrak{e}_2$	$\mathfrak{e}_2$	$\mathfrak{e}_1$	$\ldots$	$\mathfrak{e}_{2^n-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\mathfrak{e}_{2^n}$	$\mathfrak{e}_{2^n}$	$-\mathfrak{e}_{2^n-1}$	$\ldots$	$\mathfrak{e}_1$

[5]) S. Zaremba: *Arytmetyka teoretyczna*, S. 746.

Der Zahl

(9) $$z = a_1 \mathfrak{e}_1 + a_2 \mathfrak{e}_2 + \dots + a_{2^n} \mathfrak{e}_{2^n}$$

entspricht die a-Matrix, die in der ersten *Kolonne* die Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2^n}$$

besitzt.

Wir fügen noch die Bemerkung hinzu, dass bei Clifford-Zahlen mit vier Einheiten (also bei Quaternionen) der Isomorphismus

(10) $$\mathfrak{e}_1 \sim 1, \quad \mathfrak{e}_2 \sim i, \quad \mathfrak{e}_3 \sim j, \quad \mathfrak{e}_4 \sim k$$

gilt.

Wir haben die Gleichheit

(11) $$\mathfrak{E} = \mathcal{E}^*$$

wo $\mathcal{E}^*$ die zu $\mathcal{E}$ transponierte Matrix ist. $\mathcal{E}$ ist es die Matrix, welche unter und rechts der Geraden in [I] (30) steht. (Man vergleiche [II]. 6.).

3. Aus (7) haben wir

$$\mathfrak{e}_i^2 = E_i^6 = E_i^4 E_i^2 = E_1 E_i^2 = E_i^2.$$

Die a-Matrix welche der Zahl (9) zugeordnet ist hat die Form

$$\|a_1 \cdot a_{1,1}, a_2 \cdot a_{2,2}, \dots, a_{2^n} \cdot a_{2^n,2^n}\|$$

wo $a_{i,i}$ dieselbe Bedeutung was in (6) hat.

In Zusammenhang mit unseren Erwägungen aus [II] § 3. 14. werden wir eine der Zahl (9) *adjungierte* hyperkomplexe Cliffordzahl einführen. Diese Zahl bezeichnen wir mit z_* und erklären sie durch die Formel

(12) $$z_* = a_1 \mathfrak{e}_1 + a_2 \mathfrak{e}_2 + \dots + \\ + a_{2^{n-1}} \mathfrak{e}_{2^{n-1}} - a_{2^{n-1}+1} \mathfrak{e}_{2^{n-1}+1} - a_{2^{n-1}+2} \mathfrak{e}_{2^{n-1}+2} - \dots - a_{2^n} \mathfrak{e}_{2^n}.$$

Der Überlegung aus [II] § 3 nach, gelten die Formeln

(13) $$z_*^{(1)} + z_*^{(2)} = (z^{(1)} + z^{(2)})_*$$

(14) $$z_*^{(1)} \cdot z_*^{(2)} = (z^{(1)} \cdot z^{(2)})_*$$

wo $(z^{(1)} + z^{(2)})_*$ bzw. $(z^{(1)} z^{(2)})_*$ die der Zahlen $z^{(1)} + z^{(2)}$ bzw. $z^{(1)} \cdot z^{(2)}$ adjungierte Clifford-Zahlen bezeichnen.

4. Wir beweisen den

Hauptsatz: *Bezeichnen wir mit*

(9.a) $$z_1 = a_1 \mathfrak{e}_1 + a_2 \mathfrak{e}_2 + \ldots + a_{2^{n-1}} \mathfrak{e}_{2^{n-1}}$$

(9.b) $$z_2 = a_{2^{n-1}+1} \mathfrak{e}_1 + a_{2^{n-1}+2} \mathfrak{e}_2 + \ldots + a_{2^n} \mathfrak{e}_{2^{n-1}}$$

und bilden die binäre Matrix

(15) $$\mathfrak{Z} = \left\| \begin{matrix} (z_1)_* & (z_2)_* \\ -z_2 & z_1 \end{matrix} \right\|$$

so gibt es ein Isomorphismus zwischen den Zahlen (9) *und den Matrizen* (15).

5. Wir beweisen, dass *die Matrizen* (15) *ein hyperkomplexes System bilden.*

In der Tat (den Formeln (13) und (14) nach) gilt:

(16) $$\left\| \begin{matrix} (z_1^{(1)})_* & (z_2^{(1)})_* \\ -z_2^{(1)} & z_1^{(1)} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} (z_1^{(2)})_* & (z_2^{(2)})_* \\ -z_2^{(2)} & z_1^{(2)} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} (z_1^{(1)})_* + (z_1^{(2)})_* & (z_2^{(1)})_* + (z_2^{(2)})_* \\ -z_2^{(1)} - z_2^{(2)} & z_1^{(1)} + z_1^{(2)} \end{matrix} \right\| = \\ = \left\| \begin{matrix} (z_1^{(1)} + z_1^{(2)})_* & (z_2^{(1)} + z_2^{(2)})_* \\ -(z_2^{(1)} + z_2^{(2)}) & (z_1^{(1)} + z_1^{(2)}) \end{matrix} \right\|$$

(17) $$\left\| \begin{matrix} (z_1^{(1)})_* & (z_2^{(1)})_* \\ -z_2^{(1)} & z_1^{(1)} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} (z_1^{(2)})_* & (z_2^{(2)})_* \\ -z_2^{(2)} & z_1^{(2)} \end{matrix} \right\| = \\ = \left\| \begin{matrix} (z_1^{(1)})_* (z_1^{(2)})_* - (z_2^{(1)})_* z_2^{(2)}, & (z_1^{(1)})_* (z_2^{(2)})_* + (z_2^{(1)})_* z_1^{(2)} \\ -z_2^{(1)} (z_1^{(2)})_* - z_1^{(1)} z_2^{(2)}, & -z_2^{(1)} (z_2^{(2)})_* + z_1^{(1)} z_1^{(2)} \end{matrix} \right\| = \\ = \left\| \begin{matrix} (z_1^{(1)} z_1^{(2)} - z_2^{(1)} (z_2^{(2)})_*)_*, & (z_1^{(1)} z_2^{(2)} + z_2^{(1)} (z_1^{(2)})_*)_* \\ -(z_1^{(1)} z_2^{(2)} + z_2^{(1)} (z_1^{(2)})_*), & (z_1^{(1)} z_1^{(2)} - z_2^{(1)} (z_2^{(2)})_*) \end{matrix} \right\| .$$

Also

die Summe und der Produkt von zwei Matrizen (15) *ist wieder eine Matrix der Gestalt* (15), w. z. b. w.

6. Wir werden zeigen, dass es ein Isomorphismus unter den Clifford-Zahlen (9) und den Matrizen (15) stattfindet, indem die Matrizen

$$\left\| \begin{matrix} (\mathfrak{e}_\lambda)_* & 0 \\ 0 & \mathfrak{e}_\lambda \end{matrix} \right\| \quad \text{bzw.} \quad \left\| \begin{matrix} 0 & (\mathfrak{e}_\mu)_* \\ -\mathfrak{e}_\mu & 0 \end{matrix} \right\| \qquad (0 < \lambda, \mu \leqslant 2^{n-1})$$

der Einheiten $\mathfrak{e}_\lambda$ bzw. $\mathfrak{e}_{2^{n-1}+\mu}$ isomorph entsprechen.

Zum Beweis benützen wir die Multiplikationstafel (8) und einige Formeln aus der Arithmetik der Clifford-Zahlen.

7. Das Element der Matrix $\mathfrak{E}$, welches auf der Kreuzung der i-Zeile und k-Kolonne steht, bezeichnen wir mit $\mathfrak{e}_{i,k}$, das Element dagegen, welches auf derselben Stelle in der Matrix $\mathcal{E}$ [I], (30) steht, bezeichnen wir mit $e_{i,k}$.

Aus (11) haben wir

(18) $$e_{i,k}=\mathfrak{e}_{k,i}\,.$$

Es gilt die

Formel Ia:

(19) $$\operatorname{sgn}\mathfrak{e}_{1,2^{n-1}+i}=-\operatorname{sgn}\mathfrak{e}_{1,i} \qquad (0<i\leqslant 2^{n-2}).$$

Diese Formel ist nach (18) der Gleichheit

(20) $$\operatorname{sgn} e_{2^{n-1}+i,1}=-\operatorname{sgn} e_{i,1} \qquad (0<i\leqslant 2^{n-2})$$

äquivalent.

Wir kommen auf den Beweis der Formel (20):

$(\mathcal{E}^{(12)})'$ und $\mathcal{E}^{(11)}$ sind α-Matrizen und

$$\operatorname{sgn} e_{1,k}=\operatorname{sgn} e_{1,2^{n-2}+k} \qquad (0<k\leqslant 2^{n-2})$$

deshalb gilt die Gleichheit

(21) $$\operatorname{sgn} e_{i,1}=\operatorname{sgn} e_{1,2^{n-1}} \qquad (0<i\leqslant 2^{n-2}).$$

$\mathcal{E}^{(1)}$ und $(\mathcal{E}^{(2)})'$ sind α-Matrizen und

$$\operatorname{sgn} e_{1,l}=\operatorname{sgn} e_{1,2^{n-1}+l} \qquad (0<l\leqslant 2^{n-1}),$$

also

(22) $$\operatorname{sgn} e_{j,2^{n-1}}=\operatorname{sgn} e_{j,2^{n-1}+1} \qquad (0<j\leqslant 2^{n-1}).$$

Aus (22) und (21) folgt

(23) $$\operatorname{sgn} e_{i,1}=\operatorname{sgn} e_{i,2^{n-1}+1} \qquad (0<i\leqslant 2^{n-2}).$$

Aus $\mathcal{E}^{(3)}=-\mathcal{E}^{(2)}$ folgt

(24) $$\operatorname{sgn} e_{2^{n-1}+j,1}=-\operatorname{sgn} e_{j,2^{n-1}+1} \qquad (0<j\leqslant 2^{n-1}).$$

Aus (23) und (24) folgt

(20) $$\operatorname{sgn} e_{2^{n-1}+i,1}=-\operatorname{sgn} e_{i,1} \qquad (0<i\leqslant 2^{n-2}).$$

Aus (20) und (18) folgt die Formel Ia.

8. Es gilt die

Formel Ib:

(25) $$\operatorname{sgn} \mathbf{e}_{1,2^{n-1}+2^{n-2}+i} = \operatorname{sgn} \mathbf{e}_{1,2^{n-2}+i} \qquad (0 < i \leqslant 2^{n-2}).$$

Nach (18) genügt es statt (25) die Formel

(26) $$\operatorname{sgn} e_{2^{n-1}+2^{n-2}+i,1} = \operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+i,1} \qquad (0 < i \leqslant 2^{n-2})$$

zu beweisen.

$(\mathcal{E}^{(13)})'$ und $\mathcal{E}^{(14)}$ sind α-Matrizen und

$$\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+1,k} = -\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+1,2^{n-2}+k} \qquad (0 < k \leqslant 2^{n-2})$$

deshalb haben wir die Gleichheit

(27) $$\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+i,1} = -\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+i,2^{n-1}} \qquad (0 < i \leqslant 2^{n-2})$$

$\mathcal{E}^{(1)}$ und $(\mathcal{E}^{(2)})'$ sind α-Matrizen und

$$\operatorname{sgn} e_{1,l} = \operatorname{sgn} e_{1,2^{n-1}+l} \qquad (0 < l \leqslant 2^{n-1})$$

also gilt

(28) $$\operatorname{sgn} e_{j,2^{n-1}} = \operatorname{sgn} e_{j,2^{n-1}+1} \qquad (0 < j \leqslant 2^{n-1}).$$

Aus (27) und (28) folgt (indem wir in (28) $j = 2^{n-2}+i$ setzen):

(29) $$\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+i,1} = -\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+i,2^{n-1}+1}$$

Aus $\mathcal{E}^{(3)} = -\mathcal{E}^{(2)}$ folgt

24) $$\operatorname{sgn} e_{2^{n-1}+j,1} = -\operatorname{sgn} e_{j,2^{n-1}+1} \qquad (0 < j \leqslant 2^{n-1}).$$

Aus (24) und (29) (indem wir in (24) $j = 2^{n-2}+1$ setzen) folgt:

(26) $$\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+i,1} = \operatorname{sgn} e_{2^{n-1}+2^{n-2}+i,1} \qquad (0 < i \leqslant 2^{n-2}).$$

Aus (26) und (18) folgt (25).

9. Wir benützen die Formeln (19) und (25) und beweisen die

Formel II:

(30) $$z = z_1 + \mathbf{e}_{2^{n-1}+1}(z_2)_*$$

wo z, z_1 und z_2 durch die Formeln (9), (9.a) und (9.b) erklärt sind.

Es genügt augenscheinlich die Gleichheit

(31) $$\mathbf{e}_{2^{n-1}+l} = \mathbf{e}_{2^{n-1}+1}(\mathbf{e}_l)_* \qquad (0 < l \leqslant 2^{n-1})$$

zu beweisen.

$\mathfrak{E}$ ist eine α-Matrix, deshalb gilt

$$\mathfrak{E}^{(3)} = -\mathfrak{E}^{(2)}.$$

Daraus folgt

(32) $$\mathfrak{e}_{2^{n-1}+\lambda,\mu} = -\mathfrak{e}_{\lambda,2^{n-1}+\mu} \qquad (0 < \lambda, \mu \leqq 2^{n-1}).$$

Setzen wir in (32) $\lambda=1$, so haben wir

(33) $$\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1,\mu} = -\mathfrak{e}_{1,2^{n-1}+\mu} \qquad (0 < \mu \leqq 2^{n-1}).$$

Aus der Multiplikationstafel (8) folgt

(34) $$\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1,\mu} = \mathfrak{e}_{2^{n-1}+1}(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1\mu}) \cdot \mathfrak{e}_\mu = (\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1,\mu})\, \mathfrak{e}_{2^{n-1}+1} \cdot \mathfrak{e}_\mu$$
$$(0 < \mu \leqq 2^{n-1}),$$

(35) $$\mathfrak{e}_{1,2^{n-1}+\mu} = \mathfrak{e}_1 \cdot (\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1,2^{n-1}+\mu}) \cdot \mathfrak{e}_{2^{n-1}+\mu} = (\operatorname{sgn} e_{1,2^{n-1}+\mu})\, \mathfrak{e}_{2^{n-1}+\mu}$$
$$(0 < \mu \leqq 2^{n-1}).$$

Die Formeln (34) und (35) teilen wir jede in zwei Gleichheiten

(34.a) $\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1,i} = (\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1,i}) \cdot \mathfrak{e}_{2^{n-1}+1} \cdot \mathfrak{e}_i$

(34.b) $\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1,2^{n-2}+i} = (\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1,2^{n-2}+i}) \cdot \mathfrak{e}_{2^{n-1}+1} \cdot \mathfrak{e}_{2^{n-2}+i}$ $\qquad (0 < i \leqq 2^{n-2})$

(35.a) $\mathfrak{e}_{1,2^{n-1}+i} = (\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1,2^{n-1}+i})\, \mathfrak{e}_{2^{n-1}+i}$

(35.b) $\mathfrak{e}_{1,2^{n-1}+2^{n-2}+i} = (\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1,2^{n-1}+2^{n-2}+i})\, \mathfrak{e}_{2^{n-1}+2^{n-2}+i}$

Aus (33), (34.a) und (35.a) folgt

(36.a) $$(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1,i})\, \mathfrak{e}_{2^{n-1}+1}\, \mathfrak{e}_i = -(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1,2^{n-1}+i})\, \mathfrak{e}_{2^{n-1}+i}.$$

Aus (33), (34.b) und (35.b) folgt

(36.b) $$(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1,2^{n-2}+i})\, \mathfrak{e}_{2^{n-1}+1}\, \mathfrak{e}_{2^{n-2}+i} =$$
$$= -(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1,2^{n-1}+2^{n-2}+i})\, \mathfrak{e}_{2^{n-1}+2^{n-2}+i}$$

Aus (19) und (36.a) folgt

(37.a) $$\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1} \cdot \mathfrak{e}_i = \mathfrak{e}_{2^{n-1}+i} \qquad (0 < i \leqq 2^{n-2}).$$

Aus (25) und (36.b) folgt

(37.b) $$\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1} \cdot \mathfrak{e}_{2^{n-2}+i} = -\mathfrak{e}_{2^{n-1}+2^{n-2}+i} \qquad (0 < i \leqq 2^{n-2}).$$

Fassen wir (37.a) und (37.b) zusammen indem wir (12) in Acht nehmen, so erhalten wir (31). Daraus folgt die Formel II.

10. Es sei

(38) $$\zeta=\alpha_1\,\mathfrak{e}_1+\alpha_2\,\mathfrak{e}_2+\ldots+\alpha_{2^{n-1}}\,\mathfrak{e}_{2^{n-1}}.$$

Wir beweisen die

Formel III:

(39) $$\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1}\zeta=\zeta_*\,\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1}.$$

Augenscheinlich genügt es zu zeigen, dass

(40) $$\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1}\,\mathfrak{e}_\lambda=(\mathfrak{e}_\lambda)_*\,\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1} \qquad (0<\lambda\leqslant 2^{n-1})$$

(40) teilen wir in zwei Formeln

(40.a) $$\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1}\cdot\mathfrak{e}_i=(\mathfrak{e}_i)_*\,\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1} \qquad (0<i\leqslant 2^{n-2})$$

(40.b) $$\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1}\cdot\mathfrak{e}_{2^{n-2}+i}=(\mathfrak{e}_{2^{n-2}+i})_*\,\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1} \qquad (0<i\leqslant 2^{n-2})$$

und beweisen diese Gleichheiten:

Der Multiplikationstafel (8) nach (und nach der Bemerkung, dass $\operatorname{sgn}\mathfrak{e}_{\sigma,1}=1$, $0<\sigma\leqslant 2^n$) sind die Formeln (40.a) und (40.b) den Formeln

(41.a) $$(\operatorname{sgn}\mathfrak{e}_{1,i})\cdot\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1,i}=(\operatorname{sgn}\mathfrak{e}_{1,2^{n-1}+1})\,\mathfrak{e}_{i,2^{n-1}+1}$$

(41.b) $$(\operatorname{sgn}\mathfrak{e}_{2,2^{n-2}+i})\,\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1,2^{n-2}+i}=-(\operatorname{sgn}\mathfrak{e}_{1,2^{n-1}+1})\,\mathfrak{e}_{2^{n-2}+i,2^{n-1}+1}$$

äquivalent.

$\mathfrak{E}$ ist eine α-Matrix, deshalb folgt nach [I], (9), dass (41.a) und (41.b) den Formeln

(42.a) $$(\operatorname{sgn}\mathfrak{e}_{1,i})\cdot(\operatorname{sgn}\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1,i})=(\operatorname{sgn}\mathfrak{e}_{1,2^{n-1}+1})(\operatorname{sgn}\mathfrak{e}_{i,2^{n-1}+1}),$$

(42.b) $$(\operatorname{sgn}\mathfrak{e}_{1,2^{n-2}+i})(\operatorname{sgn}\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1,2^{n-2}+i})=$$
$$=-(\operatorname{sgn}\mathfrak{e}_{1,2^{n-1}+1})(\operatorname{sgn}\mathfrak{e}_{2^{n-2}+i,2^{n-1}+1})$$

äquivalent sind.

Aus $\mathfrak{E}^{(2)}=-\mathfrak{E}^{(3)}$ folgt

$$\mathfrak{e}_{i,2^{n-1}+k}=-\mathfrak{e}_{2^{n-1}+i,k}.$$

Setzen wir $i=1$, $k=1$, so haben wir

(43) $$\mathfrak{e}_{1.2^{n-1}+1}=-\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1.1}.$$

Aus

$$\operatorname{sgn}\mathfrak{e}_{2^{n-1}+1.1}=1$$

und (43) folgt

(44) $$\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1, 2^{n-1}+1} = -1.$$

Setzen wir (44) in (42.a) und (42.b), so erhalten wir

(45.a) $$(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1,i})(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{2^{n-1}+1, i}) = -\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{i, 2^{n-1}+1},$$

(45.b) $$(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{1, 2^{n-2}+i})(\operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{2^{n-1}+1, 2^{n-2}+i}) = \operatorname{sgn} \mathfrak{e}_{2^{n-2}+i, 2^{n-1}+1}.$$

Statt der Formeln (45.a), (45 b) genügt es nach (11) die Formeln

(46.a) $$(\operatorname{sgn} e_{i1})(\operatorname{sgn} e_{i, 2^{n-1}+1}) = -\operatorname{sgn} e_{2^{n-1}+1, i},$$

(46.b) $$(\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+i, 1})(\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+i, 2^{n-1}+1}) = \operatorname{sgn} e_{2^{n-1}+1, 2^{n-2}+i}$$

zu beweisen.

In $\mathcal{E}$ gilt

$$\operatorname{sgn} e_{1,\sigma} = 1 \qquad (0 < \sigma \leqslant 2^n),$$

deshalb folgt aus $\mathcal{E}^{(3)} = -\mathcal{E}^{(2)}$

(47) $$\operatorname{sgn} e_{2^{n-1}+\lambda} = -1 \qquad (0 < \lambda \leqslant 2^{n-1}).$$

Aus (47) folgt, dass die Formeln (46.a) bzw. (46.b) den Gleichheiten

(48.a) $$\operatorname{sgn} e_{i,1} = \operatorname{sgn} e_{i, 2^{n-1}+1}$$

bzw. $(0 < i \leqslant 2^{n-1})$

(48.b) $$\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+i, 1} = -\operatorname{sgn} e_{2^{n-2}+i, 2^{n-1}+1}$$

äquivalent sind.

Die Formel (48.a) haben wir schon als Formel (23) bewiesen, die Formel (48 b) dagegen haben wir als (27) bewiesen.

Damit ist (39) bewiesen.

11. Wir kommen zum Beweis des Hauptsatzes:

Sind den Clifford-Zahlen $z^{(1)}$ und $z^{(2)}$ nach (15) Matrizen $\mathfrak{Z}^{(1)}$ und $\mathfrak{Z}^{(2)}$ zugeordnet, so folgt aus (16) dass der Clifford-Zahl

$$z^{(3)} = z^{(1)} + z^{(2)}$$

die Matrix

$$\mathfrak{Z}^{(3)} = \mathfrak{Z}^{(1)} + \mathfrak{Z}^{(2)}$$

zugeordnet ist.

Wir beweisen noch, dass der Zahl

(49) $$z^{(4)} = z^{(1)} \cdot z^{(2)}$$

die Matrix

$$\mathfrak{Z}^{(4)}=\mathfrak{Z}^{(1)}\cdot\mathfrak{Z}^{(2)} \tag{50}$$

zugeordnet ist. Wir berechnen die Zahl (49):

Aus (30) folgt

$$\begin{aligned} z^{(4)}&=(z_1^{(1)}+\mathbf{e}_{2^{n-1}+1}\cdot(z_2^{(1)})_*)\cdot(z_1^{(2)}+\mathbf{e}_{2^{n-1}+1}(z_2^{(2)})_*)= \\ &=z_1^{(1)}\cdot z_1^{(2)}+z_1^{(1)}\cdot\mathbf{e}_{2^{n-1}+1}\cdot(z_2^{(2)})_*+\mathbf{e}_{2^{n-1}+1}(z_2^{(1)})_* z_1^{(2)}+ \\ &\quad+\mathbf{e}_{2^{n-1}+1}(z_2^{(1)})_*\mathbf{e}_{2^{n-1}+1}(z_2^{(2)})_*. \end{aligned} \tag{51}$$

Aus (39) und (51) folgt

$$\begin{aligned} z^{(4)}&=z_1^{(1)}\cdot z_1^{(2)}+(\mathbf{e}_{2^{n-1}+1})^2((z_2^{(1)})_*)_*(z_2^{(2)})_*+\mathbf{e}_{2^{n-1}+1}(z_1^{(1)})_*(z_2^{(2)})_*+ \\ &\quad+\mathbf{e}_{2^{n-1}+1}(z_2^{(1)})_* z_1^{(2)}. \end{aligned} \tag{52}$$

Aus

$$(\mathbf{e}_{2^{n-1}+1})^2=-\mathbf{e}_1 \tag{53}$$

und

$$(z_*)_*=z \tag{54}$$

für eine beliebige Clifford-Zahl z ((54) folgt unmittelbar aus der Definition der zu z adjungierten Zahl (12)) und (52) folgt

$$z^{(4)}=z_1^{(1)}z_1^{(2)}-z_2^{(1)}(z_2^{(2)})_*+\mathbf{e}_{2^{n-1}+1}(z_1^{(1)}z_2^{(2)}+z_2^{(1)}(z_1^{(2)})_*)_*. \tag{55}$$

Aus (55), (30) und (15) folgt, dass der Zahl $z^{(4)}$ die Matrix

$$\begin{Vmatrix} (z_1^{(1)}z_1^{(2)}-z_2^{(1)}(z_2^{(2)})_*)_*, & (z_1^{(1)}z_2^{(2)}+z_2^{(1)}(z_1^{(2)})_*)_* \\ -(z_1^{(1)}z_2^{(2)}+z_2^{(1)}(z_1^{(2)})_*), & (z_1^{(1)}z_1^{(2)}-z_2^{(1)}(z_2^{(2)})_*) \end{Vmatrix}$$

zugeordnet ist. Das ist aber nach (17) und (50) die Matrix $\mathfrak{Z}^{(4)}$. Damit ist der Beweis des Hauptsatzes zu Ende.

SUR LES FORMES QUE DOIT AVOIR UN VASE QUI, PLONGÉ DANS L'EAU, LA PARTIE IMMERGÉE SOIT UNE FONCTION DONNÉE $x_1(x)$ DE LA HAUTEUR TOTALE x DU VASE

Par C. Popovici, Bucarest

Ce mémoire est consacré au sujet que j'ai eu l'honneur de traiter devant la Société Polonaise de Mathématique, à l'Université Jagellonnienne de Cracovie, dans une de mes conférences que j'ai faites, sur l'invitation de l'illustre et vénéré maître M. Stanislas Zaremba au mois de Mai 1938.

Le but suivi dans ce mémoire est celui de montrer, par un exemple intuitif, intéressant en lui même, qu'il existe des problèmes de physique mathématique qui nous fassent voir que l'équation

$$\int_c^x Z(x,y)S(y)\,dy=Q(x) \tag{1}$$

ainsi que l'équation

$$S(x)+\int_c^x Z(x,y)S(y)\,dy=Q(x) \tag{2}$$

où le noyau $Z(x,y)$ peut être, si l'on veut, continu et ayant des dérivées de tout ordre voulu, peuvent admettre, dans des cas assez généraux pour Z, une infinité de solutions pour la fonction inconnue S.

Cela arrive lorsque le noyau $Z(x,y)$ n'est pas doté, dans l'intervalle d'intégration, par une même expression analytique d'un côté et de l'autre d'un cylindre $y=x_1(x)+x$.

Dans ces cas nous dirons que $Z(x,y)$ est un noyau *raccomodé*

Nous verrons d'abord, par des simples considérations intuitives, sans faire aucun calcul, la nature et la puissance de l'ensemble des solutions; ensuite nous emploierons des methodes analytiques et surtout graphiques pour construire les solutions et voir dans quelles conditions il existe une solution unique.

Nous verrons que l'explication du fait qu'il existent une infinité de solutions et cela même si nous ne considérons pas comme distinctes deux solutions S et s telles que

$$\int_c^x [S(y)-s(y)]\,dy=0$$

réside dans ce fait, que les équations (1) et (2), tout en gardant l'apparence d'être des équations ordinaires de M. Volterra, elles déguisent, si le noyau est raccomodé, des équations que nous avons appelé „intégro-fonctionnelles" et dont nous avons démontré qu'elles admettent une infinité de solutions. Dans l'admirable et récent traité „Théorie Générale des Fonctionnelles" de M. M. Volterra et Pérès[1]) ces célèbres auteurs ont introduit un chapitre spécial à ce sujet dans lequel se trouve une partie de nos résultats[1]).

Démonstration intuitive

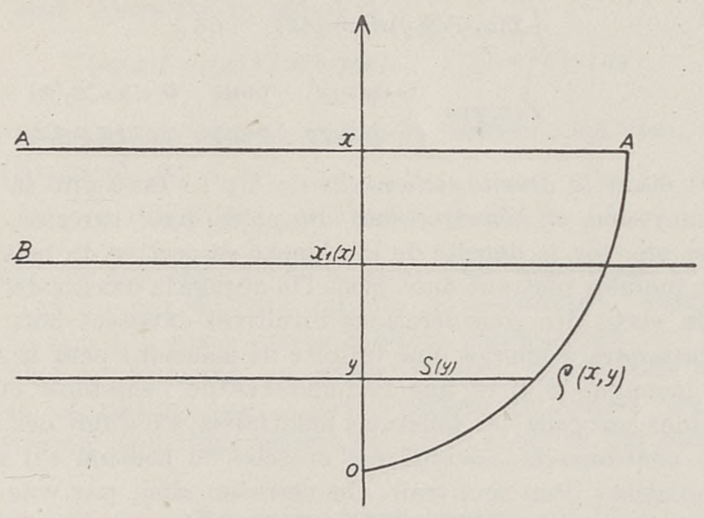
Supposons que l'on a trouvé une solution particulière.

Supposons pour fixer les idées que la forme du vase, ou d'une figure en planches de bois, nous voulons qu'elle soit une surface de révolution, et soit la courbe ci tracée AO une courbe méridienne qui nous fournit une solution, alors, on se rend compte, surtout si l'on considère la densité ϱ constante pour toute planche $S(y)dy$, dont $S(y)$ est la surface d'une section à la hauteur y du fond du vase, que notre problème est un problème de similitude et que, si par exemple $x_1(x)=\frac{2}{3}x$, alors en coupant la figure par un plan horizontal, la nouvelle surface flottante, devra, par l'énoncé du problème, rester plongée aussi deux tiers de sa hauteur dans l'eau.

---

[1]) Editions Gauthier Villars 1936. Voir notamment pp. 209, 210, 212, 214, 219, 346.

On se rend aussi compte, par un bon sens de la nature des choses que, à toute courbe méridienne AO à tangente monotone, correspond une infinité de courbes méridiennes *ondoyantes* ABO qui doivent satisfaire à notre problème. Au point de vue pratique on n'aura peut-être jamais besoin de construire de tels vases, au point de vue esthétique, si l'on veut. En tout cas un grand constructeur s'est amusé à construire



de pareils jouets; c'est le plus immortel des géomètres, le bon Dieu lorsqu'il a construit la coquille de l'escargot. Ces coquilles sont des surfaces helicoïdales qui répondent à certaines données de notre problème. On voit ainsi que ce travail est un hommage rendu au plus illustre des géomètres.

L'ensemble de ces courbes méridiennes ondoyantes aura la puissance C du continu et cela pour chaque rapport donné entre la largeur et la hauteur donnée x du vase.

Mais l'ensemble total des solutions, pour chaque hauteur et largeur données du vase, a la puissance plus grande. Elle peut être représentée par un nombre transfini $F=C^C$ qui représente la puissance de l'ensemble des fonctions arbitraires continues et discontinues. En effet rien ne nous empêche de considérer une figure constituée par des planches constituées par des innombrables cercles concentriques, dont le diamètre varie d'une manière discontinue. Par exemple les planches paires diffèrent comme diamètre des planches impaires d'une fonction donnée $\varphi(y)$ qui tend vers zéro en O et en A.

Étude analytique du problème

1. Désignons, comme plus haut par $S(y)$ la surface d'une section horizontale à la hauteur y du fond du vase. En appliquant le principe d'Archimède, on voit que la fonction $S(y)$ doit satisfaire à une équation intégrale de la forme

$$\int_0^x Z(x,y)S(y)\,dy = p(x) \quad \text{où} \tag{1}$$

$$Z(x,y) = \begin{matrix} 1-\varrho(x,y) & \text{pour} & 0<y<x_1(x) \\ -\varrho(x,y) & \text{pour} & x_1(x)<y<x, \end{matrix} \tag{1'}$$

$\varrho(x,y)$ étant *la densité sectionnelle* de $S(y)$; c'est-à-dire sa densité moyenne, en tenant comte du poids fixe: carcasse, machines etc. (ou la densité de la planche respective du bois), les poids mobiles rentrant dans $p(x)$. On néglige la densité de l'air.

En vertu des considérations intuitives exposées plus haut on s'attendra à trouver une infinité de solutions pour la fonction inconnue $S(y)$ et que la puissance de l'ensemble de ces solutions soit celle des fonctions arbitraires, s'il s'agit des solutions continues et discontinues et celle du continu s'il s'agit des solutions d'un seul trait. On verra en effet, par voie analytique et par voie graphique, en construisant ces solutions, que cela est vrai. De cette manière notre exemple sera une vérification de plus de la feconde vérité, dont M. Zaremba, avec sa haute autorité scientifique, attire l'attention que: l'intuition physique jette souvant des lumières sur des problème les plus délicates de l'analyse mathématique.

2. Nous allons voir que l'équation intégrale (1) admet une infinité de solutions et cela indépendamment du fait que le noyau Z soit continu[1]) ou discontinu. L'infinité des solutions est précisée dans ce sens que nous ne considérons pas comme distinctes deux solutions S et s telles que:

$$\int_0^x [S(y)-s(y)]\,dy = 0. \tag{2}$$

---

[1]) Nous verrons plus loin que le noyau Z peut être continu sur la ligne de flottaison, le problème d'hydrostatique tout en gardant un sens physique.

En effet l'équation intégrale (1) peut s'écrire sous la forme

$$(3) \qquad \int_0^{x_1(x)} S(y)\,dy - \int_0^x \varrho(x,y)\,S(y)\,dy = p(x)$$

qui est une équation du genre que nous avons appelé intégro-fonctionnelles. Elles admettent une infinité de solutions, comme on peut le voir par exemple en prenant la densité fonction de x seul. Alors (3) se réduit à

$$(3') \qquad V[x_1(x)] - \varrho(x)\,V(x) = p(x), \qquad V(x) = \int_0^x S(y)\,dy$$

ou si la densité ne dépende pas de la hauteur x du vase, alors en dérivant (3) on a

$$(3'') \qquad x_1'(x)\,S[x_1(x)] - \varrho(x)\,S(x) = p'(x)$$

qui sont des équations fonctionnelles et qui admettent, comme nous l'avons montré, une infinité de solutions [1]), distinctes dans le sens (2), parce que la solution générale peut être prise „ad libitum" dans un intervalle $x^0 x_1(x^0)$. Nous voilà donc obligés de traiter, pour notre problème et comme premier chapitre des équations intégrales (1), le chapitre qui suit.

Équations fonctionnelles

3. Les équations (3') et (3'') ont la même forme. Commençons par le cas le plus simple $x_1(x) = \lambda x$, $\varrho = \lambda$, $p'(x) = 0$. Nous devons résoudre l'équation fonctionnelle:

$$(4) \qquad S(\lambda x) = S(x).$$

Supposons que le vase doit être une surface de révolution. Soit $z = z(y)$ la courbe méridienne, donc $S(x) = \pi z^2(x)$. On a les solutions

$$(5) \qquad z^2(x) = Cx^r + k \quad \text{où} \quad rL\lambda = 2ni\pi,$$
$$\text{donc} \quad z^2 = k + C \sum A_n \cos 2n\pi \frac{Lx}{L\lambda} + B_n \sin 2n\pi \frac{Lx}{L\lambda};$$

on obtient un cylindre pour $C = 0$ et si $C \neq 0$ une sorte de cylindroïdes à plis qui se serrent vers le fond du vase.

[1]) Voir: *Théorie générale des fonctionnelles*, de M. M. Volterra et Pérès, p. 210 et 346.

Pour $x=0$ (en espèce $x=0$ au fond du vase) z est indéterminé, mais nous pouvons trouver des solutions de (4) en dehors de $S=k$ et qui prennent une valeur assignée k pour $x=0$ et qui de plus soient uniformes et ayant des valeurs réelles même pour $x<0$. Ainsi par exemple

$$S(x)=k+C\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda^n x}{1+c^2\lambda^{2n}x^2} \tag{6}$$

ou

$$S(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda^{n\alpha}P(\lambda^n x)x^\alpha}{1+Q^2(\lambda^n x)}+k, \tag{6'}$$

P et Q des polynômes arbitraires de dégrés p et q, $p<2q-\alpha$ et $P(0)=1$.

4. Lorsque $\lambda/\varrho=a\neq 1$ alors notre équation fonctionnelle

$$aS[x_1(x)]=S(x) \tag{3''}$$

admet des solutions de la forme

$$S=x^{-\frac{La}{L\lambda}}\left[C+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos 2k\pi\frac{Lx}{L\lambda}+B_k\sin 2k\pi\frac{Lx}{L\lambda}\right] \tag{7}$$

(C, A_k, B_k, arbitraires), parabolique pour $A_k=B_k=0$.

Pour $x=0$ on a $S=0$ si $-La/L\lambda>0$ donc $\varrho<\lambda$ et $S=\infty$ si $-La/L\lambda<0$ donc $\varrho>\lambda$ (hyperbolique).

Pourtant même dans ce dernier cas on peut avoir $S=0$ dans $x=0$, pour une infinité de solutions qu'on peut prendre de la forme

$$S=c\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{ns}\frac{\lambda^{n\alpha}P(\lambda^n x)x^\alpha}{1+Q^2(\lambda^n x)} \tag{8}$$

$$\lambda^{2q-p}<a^s\lambda^\alpha<1 \quad \text{et} \quad \alpha>-La/L\lambda,$$

p et q les dégrés des polynômes P et Q, $P(0)=1$.

Une autre solution sera

$$S=cx^{-\frac{La}{L\lambda}}\sigma(P,Q) \tag{8'}$$

où σ est l'expression (6′) où l'on prendra $k=0$ si l'on veut $S(0)=0$ et

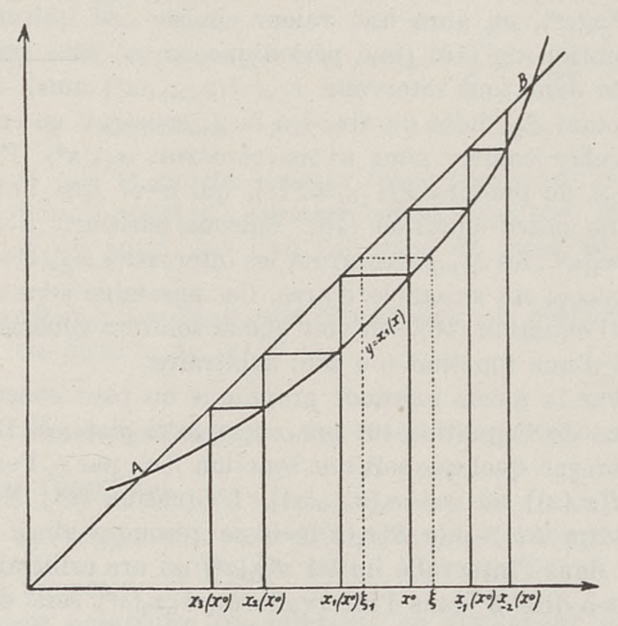
$$\alpha>-La/L\lambda.$$

Prolongement fonctionnel

5. Outre les solutions (5), (6) etc. qui dépendent d'une infinité de constantes arbitraires, nous verrons qu'il existe une infinite d'autres solutions dont la plupart ne peuvent pas être dotées d'éxpressions analytiques. Ainsi notre équation (3′) ou (3″) peut se mettre sous la forme

$$(9) \quad S(x)-a(x)S[x_1(x)]=q(x) \quad \text{où} \quad a(x)=\frac{x_1'(x)}{\varrho(x)}, \quad q(x)=\frac{-p'(x)}{\varrho(x)}.$$

Les expressions analytiques des fonctions données $a(x)$, $x_1(x)$ et $q(x)$ ne nous intéressent pas; ces expressions analy-



tiques peuvent exister, ou *n'existent même* peut être pas; elles peuvent être données par des graphiques. Il est évident que *le problème a un sens et sa solution demande une réponse.*

Nous pouvons *construire* les solutions de l'équation (9) ainsi: Traçons dans un plan la bissectrice $y=x$ et la courbe $y=x_1(x)$.

Construisons à partir d'une abscisse arbitraire x^0, par des parallèles aux axes, des marches dont les sommets s'appuient sur la bissectrice et la courbe tracée.

Les largeurs de ces marches seront: l'intervalle $x^0 x_1(x^0)$ et d'un côté ses itérés $x_1(x^0)x_2(x^0)\dots x_n(x^0)x_{n+1}(x^0)$ de l'autre côté $x^0 x_{-1}(x^0)\dots x_{-n}(x^0)x_{-n-1}(x^0)$ où $x_{\pm n+1}(x^0)=x_{\pm n}[x_1(x^0)]$.

À chaque point ξ de l'intervalle $x^0 x_1(x^0)$ corespond un point $\xi_1=x_1(\xi)$ dans l'intervalle $x_1(x^0)x_2(x^0)$.

Allons d'abord construire les solutions de l'équation (9) où l'on suppose $a=1$, $q=0$; c'est-à-dire *les fonctions périodiques en* $x_1(x)$:

(10) $$P(x)=P[x_1(x)].$$

Pour cela nous prendrons pour P une fonction (ou arc) arbitraire, dans l'intervalle $x^0 x_1(x^0)$. Pour tout point ξ compris dans $x^0 x_1(x^0)$, on aura une valeur choisie „ad libitum" $P(\xi)$. Une solution de (10) (une périodique en x_1) sera ensuite déterminée dans tout intervalle $x_{\pm n}(x^0)x_{\pm n+1}(x^0)$ ainsi: On prendra le point $\xi_{\pm n}$ itéré d'ordre $\pm n$ de ξ, construit en employant les marches comme nous avons construit $x_{\pm n}(x^0)$. Pour tout point $\xi_{\pm n}$ on prendra $P(\xi_{\pm n})=P(\xi)$, qui n'est que l'expression même de notre équation (10). Faisons parcourir à ξ l'intervalle $x^0 x_1(x^0)$, les $\xi_{\pm n}$ parcourront les intervalles $x_{\pm n}(x^0)x_{\pm n+1}(x^0)$ et P tracera un ensemble d'arcs. Cet ensemble sera une solution de l'équation (10). On voit que la solution générale de (10) dépend d'une fonction (ou arc) arbitraire.

6. Par la même méthode graphique on peut construire les solutions de l'équation (9) par exemple si $q(x)=0$. Désignons pour abréger, quel que soit une fonction $f(x)$, par f_n l'expression $f_n(x)=f[x_n(x)]$ où $x_n=x_1[x_{n-1}(x)]$. L'équation (11) $S-aS_1=0$ c'est-à-dire $S(x)-a(x)S[x_1(x)]=0$ se résoudra ainsi: Traçons pour S dans l'intervalle initial $x^0 x_1(x^0)$ un arc arbitraire. Alors S_1 c'est-à-dire S dans l'intervalle $x_1(x^0)\,x_2(x^0)$ sera déterminé et connu, on tracera dans cet intervalle et dans les suivants

(11) $$S_1=S/a,\ \ S_2=S_1/a_1=S/aa_1, \dots, S_n=S/a\,a_1\dots a_n$$

et dans les intervalles itérés négatifs $x^0 x_{-1}(x^0)\dots x_{-n-1}(x^0)x_{-n}(x^0)$ on aura

(11') $$S_{-1}=a_{-1}S,\ \ S_{-2}=a_{-1}\,a_{-2}\,S, \dots, S_{-n}=a_{-1}\,a_{-2}\dots a_{-n}S.$$

Si l'on veut tracer ces S dans le graphique, il faut convenir que l'on ait choisi une unité de mesure, parce que nous avons des multiplications et des divisions à faire.

a étant par hypothèse connu partout, $a_{\pm n}$ sera la portion de la courbe qui représente a dans l'intervalle

$$x_{\pm n}(x^0)\, x_{\pm n+1}(x^0).$$

7. Pareillement si $q \neq 0$, on aura

(12)
$$S_1 = \frac{S-q}{a},$$
$$S_2 = \frac{S_1 - q_1}{a_1} = \frac{S}{aa_1} - \left(\frac{q}{aa_1} + \frac{q_1}{a_1}\right), \ldots, S_n = \frac{S}{\pi^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{q_k}{\pi_r^{n-r}},$$

(12′)
$$S_{-1} = Sa_{-1} + q_{-1},$$
$$S_{-2} = Sa_{-1}a_{-2} + q_1 a_{-2} + q_{-2}, \ldots, S_{-n} = \frac{S}{\pi^{-n}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{q_{-n+k}}{\pi_{-n+k}^{-k}},$$

(13)
$$\pi^n = aa_1 \ldots a_{n-1}, \qquad \pi^{-n} = 1 : a_{-1}a_{-2} \ldots a_{-n}.$$

On voit que la courbe $y = a(x)$ étant tracée sur la figure, S sera connu et construit successivement dans tous les intervalles si S est tracé „ad libitum" dans un intervalle initial $x^0 x_1(x^0)$.

Remarquons, que l'équation (3′) n'exige pas $p(0)=0$, quoique (3′) est déduite de (1).

Équations fonctionnelles d'ordre supérieur

8. Soit l'équation

(14)
$$S_n + a^1 S_{n-1} + \ldots + a^{n-1} S_1 + a^n S = 0, \qquad S_k = S[x_k(x)]$$

les $a^k(x)$ donnés.

On peut construire les solutions en employant le même graphique. On voit que si, à partir d'un point arbitraire x^0, on se donne „ad libitum" $S, S_1, \ldots, S_{n-1}$ c'est-à-dire S depuis x^0 jusqu'à $x_{n-1}(x^0)$, alors S_n est déterminé par

(14′)
$$S_n = -\sum a^{n-k} S_k$$

car le second membre étant connu, on connaitra S_n c'est-à-dire S dans l'intervalle $x_n(x^0)\, x_{n+1}(x^0)$. On le connaitra ensuite dans $x_{n+1}(x^0)\, x_{n+2}(x^0)$ etc., et par le même procédé dans les intervalles négatifs.

Équations de dégré supérieur

9. Soit à intégrer l'équation

(15) $$\varphi[x_1(x)]=R[x,\varphi(x)],$$

R étant un polynôme de dégré r en φ. On peut employer le même procédé graphique. On prendra pour φ une fonction (ou arc) arbitraire dans un intervalle $x^0x_1(x^0)$ avec x^0 arbitraire. Alors $\varphi_1(x)=\varphi[x_1(x)]$ c'est-à-dire φ dans l'intervalle $x_1(x^0)x_2(x^0)$ sera connu par l'expression même de notre équation fonctionnelle:

(15) $$\varphi_1=R(x,\varphi), \quad \text{et ensuite} \quad \varphi_2=R(x_1,\varphi_1),\ldots,\varphi_n=R[x_{n-1},\varphi_{n-1}].$$

Pour faire le prolongement fonctionnel vers les itérés négatifs nous écrivons (15) sous la forme

(15') $$\varphi(x)=R[x_{-1},\varphi_{-1}]$$

et remarquons que, $\varphi(x)$ étant donné dans un intervalle $x^0x_1(x^0)$, l'équation (15') nous donne r racines de φ_{-1} c'est-à-dire r branches, en d'autres termes r solutions de φ dans l'intervalle $x^0x_{-1}(x^0)$. À chacune de ces solutions correspondront aussi r branches réelles ou imaginaires φ_{-2} donc en total r^2 déterminations de φ dans $x_{-1}(x^0)x_{-2}(x^0)$.

En résumé, la solution de l'équation (15), après avoir été choisie „ad libitum" dans $x^0x_1(x^0)$, se présentera comme un arbre, dont le tronc (vers les itérés positifs) sera déterminé et unique, tandis que vers les itérés négatifs les branches se ramifieront de sorte que, au niveau $x_{-n}(x^0)$, on aura r^{n+1} branches. Si le premier membre de (15) était du dégré s en φ, le tronc se ramifiera vers le bas, de sorte qu'on aura s^n branches au niveau $x_n(x^0)$. Quelques-unes de ces ramifications peuvent devenir imaginaires, puis réaparaître comme certains fleuves qui se cachent sous le sable. Exemple:

$$\varphi_1=i/\varphi,\ i=\sqrt{-1},\ \text{donne}\ \varphi_{2n}=\pm\varphi,\ \varphi_{2n+1}=\pm i:\varphi.$$

Équations intégrales et intégro-fonctionnelles

10. Le problème de déterminer la forme d'un vase flottant dont la partie immergée dans l'eau soit une fonction $x_1(x)$ de la hauteur x du vase nous a ammené à l'équation intégrale

$$\int_0^x Z(x,y)\,S(y)dy = p(x) \tag{1}$$

où

$$\begin{aligned} Z(x,y) &= 1-\varrho(x,y) \quad \text{pour} \quad y<x_1(x) \\ Z(x,y) &= -\varrho(x,y) \quad \text{pour} \quad y>x_1(x), \end{aligned} \tag{1'}$$

$\varrho(x,y)$ étant la densité d'une section $S(y)$ à la hauteur y du fond du vase, $p(x)$ la cargaison.

Nous avons vu que cette équation admet une infinité de solutions, l'inconnue $S(y)$ pouvant être prise arbitraire dans un intervalle $x^0x_1(x^0)$, avec x^0 arbitraire. Nous avons vérifié ça sur les cas particuliers où ϱ dépend soit de x, soit de y seulement.

Dans ces cas l'équation intégrale se reduisait à une équation fonctionnelle, dont nous avons montré qu'elle admet une infinité de telles solutions. Lorsque ϱ est une fonction en même temps de x et de y, comme il est naturel, il va de soi que „a fortiori" l'équation (1) admettra une infinité de solutions. Ainsi par ex. si $\varrho=\sum_1^n a^k(x)\,y^k$ on arrivera soit en différentiant, soit en intégrant par parties, à une équation différentiello-fonctionnelle d'ordre $n+1$, équation qui, nous le verrons, admet aussi une infinité de solutions.

11. *Objections sur la continuité du noyau.* On pourrait nous objecter: Oui, vous avez une infinité de solutions et, plus encore, dépendant d'une fonction arbitraire; mais cela est dû au fait que l'équation (1) n'a pas de noyau continu[1]). Nous allons montrer: 1° que même si le noyau est continu, ça n'empêche pas que l'équation (1) admette, en général, une infinité de solutions; 2° que l'on peut rendre le noyau continu, tout en gardant un sens physique à l'équation (1). Ça

[1]) Dans certains traités on n'exige pas même la continuité du noyau, mais seulement qu'il soit intégrable, pour que la solution soit unique. Or notre noyau est intégrable et pourtant il y a une infinité de solutions.

d'abord: Les relations (1') nous montrent que le noyau Z ne peut pas être continu en traversant la ligne de flottaison $y=x_1(x)$. Mais cela est vrai seulement si ϱ est continu — en traversant cette ligne. Or, en général ϱ n'est pas continu. Quand on construit un vase, les différents étages varient brusquement de densité, à certains niveaux la densité peut même dépasser celle de l'eau. Pour rendre le noyau de (1) continu, il nous suffit d'une seule discontinuité de ϱ, le long de la ligne de flottaison. Ainsi supposons nous deux fonctions continues ϱ_1, et ϱ_2 et notons

$$(1'') \quad 1-\varrho_1(x,y)=f(x,y), \qquad -\varrho_2(x,y)=f(x,y)+[y-x_1(x)]^k\psi(x,y).$$

Pour garder un sens physique, il faut supposer $f(x,y)<0$ au voisinage de $y=x_1(x)$.

Notre équation (1) s'écrira

$$(16) \quad \int_0^x f(x,y)\,S(y)\,dy+\int_{x_1(x)}^x [y-x_1(x)]^k\psi(x,y)\,S(y)\,dy=p(x).$$

Cette équation contient comme componente une intégrale avec les *deux* limites variables et nous avons démontré dans différents travaux, depuis 1914, qu'une telle équation intégrale admet une infinité de solutions [1]). Dans ce travail nous allons voir ça directement. Pour nous en rendre compte, il suffit de le vérifier sur un cas simple. Soit $\psi(x,y)=c$, $k=1$. Prenons comme fonction inconnue auxiliaire $t(y)$ telle que sa derivée seconde $t''(y)=S(y)$ alors (16) s'écrira

$$(17) \quad \int_0^x f(x,y)\,t''(y)\,dy+c[x-x_1(x)]\,t'(x)-c[t(x)-t[x_1(x)]]=p(x)$$

qui est une équation intégro-différentiello-fonctionnelle. Si f ne dépend pas de y on obtient une équation différentiello-fonctionnelle

$$(18) \quad [f(x)+c[x-x_1(x)]]t'(x)-ct(x)-f(x)t'(0)-p(x)=-ct[x_1(x)].$$

Nous voila donc conduits à étudier les:

---

[1]) C. Popovici: *Nouvelles solutions de l'équation de Volterra*, Circolo Math. Palermo t. 39 (1915), p. 314—344; *Sur une équation fonctionnelle*, C. R. Ac. Paris, t. 158 (1914), p. 1866 etc. Pour le cas de deux variables voir deux notes: Rend. Ac. Lincei, t. 2 (1930), 6 série, et Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, t. XXIV, pp. 18—56.

Équations différentiello-fonctionnelles

12. Ces équations peuvent aussi s'intégrer intuitivement par la *méthode du prolongement fonctionnel.*

Prenons d'abord l'équation:

$$(19) \qquad y^k(x)=a(x)\,y[x_1(x)], \qquad y^k(x)=\frac{d^k y(x)}{dx^k}.$$

Nous allons voir ce fait, extrêmement curieux: lorsque $x_1(x)=x$ l'équation *ne peut pas s'intégrer*, en général, si $k \geqslant 2$; tandis que si $x_1(x) \neq x$ l'équation, *quoique plus compliquée, peut toujours s'intégrer. Elle le peut même si $a(x)$ et $x_1(x)$ ne sont pas dotés d'expressions analytiques.*

Prolongement fonctionnel

13. Nous allons nous servir de même graphique que au § 5.

Prenons pour $y(x)$ une fonction (ou arc) arbitrairement choisi dans un intervalle $x^0 x_1(x^0)$ avec x^0 aussi arbitrairement choisi, alors $y[x_1(x)]$, en d'autres termes y_1 dans l'intervalle $x_1(x^0)\ x_2(x^0)$ sera donné par

$$(19) \qquad y[x_1(x)]=\frac{y^k(x)}{a(x)}$$

où le second membre est connu car, y étant donné dans l'intervalle initial, toutes ses dérivées y sont implicitement données, ensuite $a(x)$ est donné par hypothèse (tracé) pour toute valeur de x. Maintenant y_1 étant connu, on aura successivement $y_2 \ldots y_n$ par

$$(19') \qquad y_n=\frac{y^k_{n-1}}{a}=\frac{y^k(x)}{a a_1 \ldots a_{n-1}}.$$

Ainsi l'intégrale y de (19) étant choisie „ad libitum" dans $x^0 x_1(x^0)$, elle sera connue, et aura une seule valeur, pour tout point contenu dans un intervalle $x^0 a$ contenu dans $x^0 A$, $A=\lim x_n$.

14. Nous allons faire maintenant le prolongement fonctionnel vers les itérés négatifs. De ce côté, il arrive un phénomène analogue à celui que nous avons rencontré en résolvant les équations fonctionnelles de dégrés supérieurs, la solution ne

sera plus unique. En effet, changeons dans (19) x en $x_{-1}(x)$, on aura

$$(19'') \qquad \frac{d^k y[x_{-1}(x)]}{dx_{-1}(x)^k} = a[x_{-1}(x)]\, y(x).$$

Le second membre est connu, car y est tracé dans l'intervalle initial $x^0x_1(x^0)$ et a est tracé partout. On connaitra donc, non y, mais sa derivée d'ordre k dans $x_{-1}(x^0)\,x_{-2}(x^0)$.

La fonction (ou courbe) y sera donc connue à un polynome (parabole) arbitraire d'ordre k près, donc avec k constantes arbitraires.

Dans le second itéré négatif de l'intervalle initial s'introduiront encore k constantes arbitraires, on aura donc dans $y_{-n}(x^0)\,y_{-n-1}(x^0)$, nk constantes arbitraires, après avoir choisi y „ad libitum" dans $x^0x_1(x^0)$.

15. Supposons maintenant que l'équation (5) serait non linéaire, par exemple son premier membre serait de dégré r en $d^ky(x)/dx^k$, alors on aura une et une seule solution vers les itérés positifs, après avoir assigné à y une fonction donnée dans $x^0x_1(x^0)$; mais vers les itérés négatifs la solution ne sera pas unique, elle aura dans l'intervalle $x_{-n+1}(x^0)x_{-n}(x^0)$, *n^r branches et chaque* branche dépendra de *nk constantes arbitraires.*

Si, en plus, le second membre de (5) était de l'ordre q en $x_1(x)$ c'est-à-dire contiendrait $y_1, y_2, \ldots, y_q$, alors nous étions libres de choisir y „ad libitum" dans un intervalle $x_0x_q(x^0)$, ou dans q intervalles $x^px_1(x^p)$ avec les x^p arbitraires, mais choisis tels que ces intervalles ne s'enchevêtrent pas.

Puissance de l'ensemble de solutions

16. *La puissance de l'ensemble de solutions d'une équation différentiello-fonctionnelle, d'ordre q et de dégré r est la même que la puissance de l'ensemble de solutions d'une équation fonctionnelle d'ordre q.*

Cette puissance est celle de l'ensemble de fonctions arbitraires s'il s'agit des solutions continues et discontinues (c'est le nombre transfini $F=C^C$) et celle du continu C s'il s'agit des solutions continues dans tout intervalle qui ne contient pas un point limite $x_{\pm n}$, mais pouvant être discontinues dans les points limites.

L'ensemble de solutions d'une équation fonctionnelle est évidement de puissance F, parce que la solution générale n'est qu'une transformation *ponctuelle* d'une fonction arbitraire, *continue* ou *discontinue*, dans l'intervalle initial, comme les images dans une série de miroires gauches de cette fonction. Il n'est pas question absolue de l'existence des dérivées etc.

Lorsqu'il s'agit des équations différentiello-fonctionnelles on est obligé de penser à l'existence des dérivées, mais il n'est pas moins vrai que la solution générale dépend d'une fonction arbitraire initiale, continué ou discontinue. Il faudra alors élargir le cadre de la notion de dérivée; d'ailleurs il y a des fonctions continues et qui n'ont pas de dérivées et des fonctions discontinues dont l'aire est la même que celle d'une fonction continue dans tout intervalle. Gardons la vieille conception de la derivée et supposons que nous ayons choisi dans l'intervalle initial pour la solution un arc d'un seul trait et continu. Il y aura des discontinuités au points de jointure $x_{\pm n}(x^0)$ et aux points limites de ceux-ci, autant pour les équations fonctionnelles que pour les équations différentielle-fonctionnelles; mais à cet arc correspond une seule solution pour les équations fonctionnelles et un ensemble fini ou dénombrable de solutions (si l'on va jusqu'aux points limites) pour les équations différentiello-fonctionnelles. L'ensemble de solutions dans les deux cas garde la puissance du continu, parce que nous avons choisi librement la fonction arbitraire continue dans l'intervalle initial. Le nombre des branches et des constantes arbitraires nous donne en effet plus de dégrés de libertés, mais en tout cas ne peut pas agrandir la puissance du nombre transfini de solutions qui reste celle du continu. Nous verrons plus loin comment on fait la jointure, plus encore, le raccordage jusqu'à un ordre infini dans les points de passage $x_{\pm n}(x^0)$ et quelle est la puissance de l'ensemble de ses solutions; nous ferons aussi l'étude de la continuité aux points limites.

17. *Continuité.* Commençons l'étude de la continuité pour les solutions des équations fonctionnelles. Rappelons-nous les § 5 et 6 et le graphique à l'aide duquel nous avons construit ces solutions. Soit d'abord l'équation de périodicité pour la transformation $x_1(x)$

(20) $$P[x_1(x)]=P(x).$$

Nous avons vu que nous sommes libres de prendre pour P une fonction (ou arc) arbitraire dans un intervalle $x^0x_1(x^0)$ et ensuite considérer un point ξ qui parcourt cet intervalle, ainsi que ses itérés de ξ, les $x_1(\xi), x_2(\xi), ..., x_n(\xi)$ définis par $x_{\pm n}(\xi)=x_1[x_{\pm n-1}(\xi)]$ et, nous aurons la solution de l'équation en prenant

(20) $$P(\xi_1)=P(\xi)=...=P(\xi_{\pm n}).$$

L'ensemble des arcs décrits par $\xi P(\xi)$ et ses itérés $x_{\pm n}(\xi) P(\xi)$ nous donnera une de ces solutions de (20).

Nous voyons que, pour avoir une solution continue, il faut d'abord que l'arc que nous tracerons pour P dans l'intervalle initial $x^0x_1(x^0)$ soit continu, et il faut de plus, que les ordonnées aux extremités de cet arc soient égales pour établir la jonction avec son itéré, donc

(21) $$P(x^0-0)=P(x_1(x^0)+0).$$

18. Pour les équations non linéaires la jonction s'établit aux points de passage par une relation analogue à (21). Ainsi soit l'équation

(22) $$y[x_1(x)]=R[x, y(x)].$$

Pour établir la jonction en $x_1(x^0)$, on prendra dans l'intervalle initial pour y un arc continu, avec la seule condition entre les ordonnées de ses extrémités

(23) $$y[x_1(x^0)+0]=R[x^0, y(x^0-0)];$$

la jonction sera *automatiquement* établie dans tous les points $x_{+n}(x^0)$ tandis que dans les points $x_{-n}(x^0)$ avec celle des branches de l'équation (22) en $y(x)$ qui correspond à l'arc initial choisi.

19. *Domaine de valabilité de la continuité.* L'arc initial étant choisi continu et la jonction faîte aux points de passage, la solution sera continue dans tout intervalle ab donné compris dans un intervalle AB contenant x^0 et où A et B sont deux racines consécutives de l'équation $x=x_1(x)$; mais vers les points limites A et B la solution sera d'un seul trait, mais pas en général continue. Nous reviendrons sur la continuité aux points limites au § 26 et 27.

20. *Raccordage.* On peut établir non seulement la continuité, mais le reccordage jusqu'à l'ordre k dans ces points $x_{\pm n}(x^0)$ si l'on exprime entre les extrémités de l'arc initial les relations qui traduisent les égalités

$$(24) \qquad y^j[x_1(x^0)-0]=y^j[x_1(x^0)+0], \qquad j=0,1,\ldots,k,$$

l'indice j désignant la dérivée d'ordre j.

Ainsi, par exemple, pour l'équation de périodicité (20) on aura pour $j=1$

$$(24') \qquad P'_{x_1}[x_1(x^0)+0]x_1'(x^0)=P'(x^0-0)$$

et pour l'équation (22)

$$(24'') \qquad y'_{x_1}[x_1(x^0)+0]x_1'(x^0)=\left(\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}y'\right)_{x_0-0}.$$

Le raccordage établi en un seul point de jointure $x_1(x^0)$ doit se repercuter dans tous les points de jointure (avec la même branche correspondante) parce que la transformation de x en $x_1(x)$ étant ponctuelle, c'est une transformation de contact. On suppose que la courbe $x_1=x_1(x)$ n'a pas de points anguleux.

21. *Raccord d'ordre infini.* Si dans les équations (24) on prend $k=\infty$, on aura dans les $x_{\pm n}(x^0)$ non seulement la continuité, mais *un raccord d'ordre infini* [1]).

L'ensemble de ces solutions garde encore la puissance du continu, parceque l'arc arbitraire continu, choisi dans l'intervalle initial, arc qui détermine une seule el unique solution de l'équation fonctionnelle, apartient à un ensemble continu; tandis que les conditions (24) forment un ensemble dénombrable, qui regarde un nombre discret de points (un ensemble de mesure nulle, non partout dense) de l'arc continu arbitraire.

22. *Fonction analytique osculatrice.*

Pour un raccordage d'ordre infini au point de jointure nous voyons que nous sommes libres de prendre à notre gré l'allure de l'arc initial à une extrémité, soit en $x_1(x^0+0)$; mais

[1]) Nous pouvons même donner des exemples de courbes qui aient dans un intervalle fini des contacts d'ordre infini sur un ensemble partout dense, sans que ces courbes se confondent; plus encore, elles peuvent même se traverser dans le même intervalle sur un second ensemble partout dense.

alors en x^0-0 l'allure de cet arc est déterminée, parce que les équations (24), (24'), (24'') nous montrent que les dérivées $y_0^j(x^0-0)$ en x^0-0 sont déterminées à l'aide des dérivées en $x_1(x^0)+0$. Soit alors la fonction

$$(25) \qquad Y=y_0+(x-x^0)y_0'+\ldots+\frac{(x-x^0)^n}{n!}y_0^n+\ldots$$

Elle peut représenter une fonction analytique, si elle est convergente, mais elle ne représente pas l'arc initial que nous avons raccordé dans le prolongement fonctionnel à son itéré avec un ordre infini (raccordage qui se repercute dans les autres points de jonction). L'expression (25) sera appelée *fonction analytique osculatrice* en x^0 de notre arc initial, qui est en général non analytique.

Il y a aussi parmi les surfaces non analytiques un sous-ensemble de surfaces qui admettent pareillement des surfaces analytiques osculatrices. Je pense que cette question ne manque pas d'interêt.

Continuité des intégrales des équations différentiello-fonctionnelles

23. Nous avons vu au § 13, 14 et 15 comment on construit les intégrales d'une équation différentiello-fonctionnelles par la méthode du prolongement fonctionnel à l'aide du graphique. Ainsi, par exemple, l'équation

$$(19) \qquad \frac{d^ky(x)}{dx^k}=a(x)y[x_1(x)]$$

s'intègre ainsi: On assigne a y une fonction (ou arc) arbitrairement choisie dans un intervalle initial $x^0x_1(x^0)$. Alors dans les intervalles $x_n(x^0)x_{n+1}(x^0)$ itérés positifs de $x^0x_1(x^0)$ la traduction graphique de notre équation (19) nous montre que l'on aura successivement dans chaque intervalle

$$(19') \qquad y_n(x)=y[x_n(x)]=\frac{d^ky[x_{n-1}(x)]}{[dx_{n-1}(x)]^k}:a[x_{n-1}(x)]$$

donc une solution unique; mais cette solution ne sera pas en générale continue aux points de jointure $x_n(x^0)$. On établit la

continuité au point $x_1(x^0)$ en prenant, aux extrémités de l'arc initial la relation

$$(26) \qquad y[x_1(x^0)+0] = \frac{d^k y[x^0-0]}{(dx^0)^k} : a(x^0-0)$$

c'est-à-dire une relation entre la fonction initiale à l'extrémité gauche et sa dérivée k à l'extremité droite. En continuant la jonction dans $x_2(x^0)$ on doit imposer la même relation aux extremités du prolongement fonctionnel de l'arc dans $x_1(x^0)x_2(x^0)$, ce qui se repercute par une autre relation entre la dérivée d'ordre $2k$ et la fonction initiale aux entrémités de l'arc initial. Dans chaque intervalle il reste donc $k-1$ dérivées libres aux points de passage. Jusqu'au point $x_n(x^0)$ il faudra satisfaire à n relations entre les nk dérivées aux extrémités de l'arc initial; mais entre ces extrémités l'arc initial reste arbitraire. Nous pouvons le tracer continu. On aura alors une solution continue depuis x^0 jusqu'à $x_n(x^0)$. Si nous continuons la jonction vers le point attractif $A = \lim x_n(x^0)$, $n \to \infty$, nous aurons une solution *d'un seul trait*, mais qui ne sera pas généralement continue vers A. Elle pourra devenir non bornée, ou même si elle reste bornée, elle pourra avoir vers A une variation totale infinie et dans ce dernier cas on ne peut pas affirmer qu'elle sera surement discontinue, parce que nous verrons qu'il peuvent exister des *fonctions continues* dans le voisinage d'un point et pourtant *à variation totale infinie* en s'approchant de ce point.

L'ensemble de ces solutions d'un seul trait aura la puissence du continu, comme pour le cas du raccordage d'ordre infini dans le § 17 et pour les mêmes raisons.

S'il existe une solution analytique, elle dépendra de k constantes arbitraires.

Il en resulte que les équations fonctionnelles linéaires pures n'admettent que, au plus, une solution analytique (avec une constante arbitraire). Ainsi

$$P(x) = P[x_1(x)], \qquad P = C$$

$$af(x) = f(ax), \qquad f = Cx^r \text{ si } r = \frac{La}{La} \text{ est entier}$$

$$ax^r f(x) = f(ax^p), \qquad f = cx^q \text{ si } q = \frac{r}{p-1} \text{ est entier et } a = \alpha^q.$$

Exception font certaines équations de construction spéciale comme $f(x+\lambda)=f(x)$, fonctions circulaires de période $2\pi/\lambda$ dont une infinité sont analytiques, $f(x)\pm f(-x)=0$, fonction impaire ou paire.

24. *Continuité vers les itérés négatifs.* L'équation (19), qu'on peut écrire sons la forme:

$$(19_1) \qquad \frac{d^k y[x_{-1}(x)]}{d[x_{-1}(x)]^k}=a[x_{-1}(x)]y(x)$$

nous montre que si nous connaissons $y(x)$ c'est-à-dire y entre x^0 et $x_1(x^0)$, on aura $y(x_{-1})$ non directement, mais par sa dérivée k-ième, donc il s'introduisent k constantes arbitraires, qu'il faut choisir pour déterminer y quand on passe d'un intervalle à son itéré contigu dont l'indice est diminué de 1. Alors après avoir choisi l'arc initial, il suffit d'une de ces constantes, à chaque passage, pour établir la jonction. Il reste disponibles $k-1$ constantes à chaque passage. On pourrait les employer pour satisfaire à différentes conditions initiales.

On peut également se servir soit pour la jonction, soit pour d'autres conditions initiales, en imposant des relations correspondantes entre les dérivées aux extrémités de l'arc initial. Les solutions continues vers les itérés négatifs forment aussi un ensemble de puissance de continu.

Le nombre croissant, à devenir dénombrable, de constantes arbitraires qui s'ajoutent au point limite répulsif ne change pas la puissance de l'ensemble.

25. *Passage des équations différentiello-fonctionnelles aux équations intégrales.*

Si l'on intègre $p\gtreqless k$ fois une équation fonctionnello-différentielle d'ordre k, comme par ex. (19), on aura une équation intégrale, ou intégro-différentiello-fonctionnelle. À chaque intégration s'introduit une constante qu'on peut assujetir pour satisfaire telle condition initiale. Supposons que nous avons un nombre p de conditions à satisfaire dans p points x^j dont aucun n'est point limite des x_n. Il nous faut p constantes arbitraires. Nous avons plusieurs moyens pour les obtenir: 1⁰ On peut imposer p conditions ponctuelles convenablement choisies à l'arc arbitraire que nous pouvons prendre dans n'importe

quel intervalle initial, 2° on peut choisir l'intervalle initial assez près du point limite attractif pour que, en faisant le prolongement fonctionnel vers les itérés négatifs de cet intervalle, on arrive à chaque point x^0 de l'intervalle d'intégration avec le nombre de constantes libres d'intégration nécessaires pour satisfaire nosc onditions en x^j. Exemple: si $p=mk+r$ et p conditions en x^1, on choisira x^0 tel que $x_{-m}(x^0)<x^1$.

26. *Conditions aux points limites. Compatibilité.* Il arrive des fois que l'équation fonctionnelle, ou fonctionnello-différentielle, à laquelle nous avons réduit l'équation intégrale soit par intégration par parties, soit par dérivations, admette des solutions, même une infinité, mais dont aucune ne satisfasse pas l'équation intégrale de départ. Exemple: l'équation intégrale de notre problème d'hydrostatique

$$(3)\qquad \int_0^{x_1(x)} S(y)\,dy-\int_0^x \varrho(x) S(y)\,dy=p(x)$$

qui se réduit à

$$(3')\qquad V[x_1(x)]-\varrho(x)V(x)=p(x),\quad V(x)=\int_0^x S(y)\,dy$$

par la nature des choses $0<x_1(x)<x$ parce que x c'est la hauteur de vase et $x_1(x)$ celle de la ligne de flottaison par rapport au fond. Donc $x_1(0)=0$ alors (3′) nous exige

$$V(0)=\frac{p(0)}{1-\varrho(0)}$$

pour toutes les solutions de (3′) et nous avons vu qu'il en existent une infinité dépendant d'une fonction arbitraire. Or, si $p(0)\neq 0$, alors $\int_0^x S(y)\,dy=V(x)$ doit être différent de zéro pour $x=0$. Quelle est alors la fonction $S(y)$? [1]).

---

[1]) Malgré toutes les apparences, la condition $p(0)=0$ n'est qu'artificielle, parce que c'est une simple exigeance analytique, qui ne tient pas compte de la réalité physique. La réalité c'est qu'il faut prendre $p(0)\neq 0$ parce qu'il faut doter le fond du vase d'un minimum d'épaisseur a. Il faut donc prendre $\int_a^x S(y)\,dy=V(x)$ et $V(0)\neq 0$ le considérer comme faisant partie de cargaison. Dans la physique, il arrive des fois qu'il faut quitter l'analyse différentielle pour l'analyse fonctionnelle, comme dans la théorie des chaleurs spécifiques des solides à basses temperatures, les quanta etc.

Lorsque $p(0)=0$, alors on a effectivement une infinité de solutions. Aussi lorsque $p(0)=0$ avec $\varrho(0)=1$. Il est intéressant de remarquer que l'équation (3') admet des solutions même si $\varrho(0)=1$ avec $p(0)\neq 0$, mais ces solutions ne sont pas uniformes.

En général, l'allure des solutions aux points limites se voit sur l'équation même. Ainsi par ex. l'équation (18) peut s'écrire

$$(18') \quad f(x)[t'(x)-t'(0)]+c[x-x_1(x)]t'(x)-c[t(x)-t[(x_1(x)]]=p(x).$$

On voit que, pour qu'elle admette des solutions continues au point $x=0$, il est nécessaire que $p(0)=0$ et que, si $f(0)\neq 0$, il faut que $t'(0)$ ait une valeur finie, ce qui n'exige pas nécessairement que $t'(x)$ soit continue pour $x=0$. Enfin pour que la solution aie un sens physique pour notre problème, il faut que t'' existe parce que $t''(y)=S(y)$.

27. *Continuité aux points limites.* Nous avons vu que nous pouvons construire une infinité de solutions continues dans tout intervalle $A+\varepsilon$, $B-\eta$, A et B étant deux racines consécutives de l'équation $x=x_1(x)$, ε et η aussi petits qu'on le veut. L'ensemble de ces solutions, nous l'avons vu, aura la puissance du continu. Aux points limites A et B les solutions présentent différents caractères: Il y a à la fois des solutions continues et d'autres discontinues. Dans d'autres cas toutes les solutions doivent présenter en un des deux points limites, où dans les deux, des singularités essentielles. Il y a des cas où toutes les solutions, même celles qui étaient discontinues dans $A+\varepsilon$, $B-\eta$ deviennent continues et, ce qui est curieux, même les solutions qui n'étaient pas d'un seul trait deviennent continues. D'autres cas où toutes solutions deviennent continues vers le point limite en s'y approchant tout de même avec une variation totale infinie. Nous allons faire voir sur des exemples simples ces genres curieux de singularités.

28. *Singularités essentielles.* Soit à intégrer l'équation fonctionnelle

$$(9) \qquad \varphi(x)-a(x)\varphi[x_1(x)]=0.$$

Nous avons donné la solution générale de cette équation sous la forme

$$\varphi(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\prod^{n}(u_n-u_{n-1})^{\alpha}(v_{-n}-v_{-n+1})^{\beta}$$

où $\prod^{n}=aa_1\ldots a_{n-1}$, $\prod^{-n}=1:a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-n}$, $a_{\pm n}$ comme toujours $a[x_{\pm n}]$ avec $x_{\pm n}=x_1[x_{\pm n-1}]$, u et v deux fonctions arbitraires qu'on peut choisir pour la convergence, α et β nombres convenablement choisis dans le même but.

Nous avons aussi vu (§ 5) qu'on peut prendre pour φ un arc arbitraire dans un intervalle $x^0x_1(x^0)$ avec x^0 arbitraire. Cherchons l'allure de φ au point limite attractif $x=A$; on aura

$$\varphi_n=\frac{\varphi}{aa_1\ldots a_{n-1}}. \tag{9'}$$

Par suite, si le produit $\prod^{n}=a\cdot a_1\ldots a_{n-1}$ est convergent vers une limite pour $n\rightarrow\infty$ et si x_n tend *uniformément* vers une limite A, alors dans chacun des très petits espaces $x_n(x^0)\,x_{n+1}(x^0)$ toute solution de (9) devra avoir une variation totale du même ordre que dans l'intervalle initial. Donc, même les solutions qui ont été continues dans $A+\varepsilon, B-\eta$ seront discontinues lorsque x tend vers A, mais finies et d'un seul trait.

Une équation différentiello-fonctionnelle telle que (18) peut admettre à côté des solutions continues en A des solutions dont A peut être un point singulier essentiel, comme (8).

Si $\prod^{n}$ tend vers zéro, $\varphi(x_n)$ tend vers l'infini.

29. *Fonctions à crépitations.* Supposons que $\prod^{n}$ tende vers l'infini. Alors, vu (9'), *toutes* les solutions de (9), même celles discontinues, et même celles qui *ne sont pas d'un seul trait*, tendent vers zéro au point limite attractif A. Rappellons nous maintenant la définition classique de la continuité et notamment celle de continuité à droite: Une fonction est continue à droite d'un point A si, δ étant un nombre positif arbitrairement donné, il existe un nombre positif ε tel que

$$|f(A)-f(A+\varepsilon')|<\delta \tag{c}$$

pour tout nombre positif $\varepsilon'<\varepsilon$. Or cette relation de „continuité“ sera satisfaite même pour les solutions de (9) qui

ne sont pas d'un seul trait entre $A+\varepsilon$ et $B-\eta$; par ex., si l'on n'a pas fait le jonction aux points de passage $x_n(x^0)$. Donc la relation de continuité (c) peut être satisfaite pour un fonction lorsque la variable tend vers une limite A sans que la fonction soit obligée à prendre toujours toutes les valeurs intermédiaires entre deux valeurs. La fonction aura des sauts qui tendent rapidement vers zéro comme les crépitations d'un courant qui traverse des fils séparés par des diélectriques dont l'épaisseur tend vers zéro.

30. *Fonctions continues à droite d'un point et pourtant à variation totale infinie lorsque la variable approche ce point.*

Supposons une fonction, d'un seul trait ou non, qui dans chaque intervalle $x_n x_{n+1}$ a une variation totale v_n. Supposons ensuite que les intervalles $x_n x_{n+1}$, sont les termes d'une série absolument covergente, tandis que les v_n tendent vers zéro mais ils sont les termes d'une série divergente; alors notre fonction satisfaira à la relation de *continuité* (c) et pourtant sa *variation totale sera infinie* lorsque x approche A.

On peut composer des exemples d'équations fonctionnelles dont toutes les solutions jouissent de cette propriété. Ex.: si dans l'équation (9) on prend $a=\frac{1+kLx_1(x)}{1+kLx}$ où $x_1(x)=x\psi(x)$, $\psi(x_n)\rightarrow a$ (constante), L=logarithme.

31. *Cas où un point limite est à l'infini.* En d'autres termes la courbe $y=x_1(x)$ admet une direction assymptotique $y=x$. Proposons nous d'étudier l'allure des solutions vers la direction asymptotique. Supposons que $\prod^n$ admet une limite. Alors si $y=x$ est une direction asymptotique sans être une asymptote, la variation totale de φ dans un intervalle $x_n x_{n+p}$ reste finie pour p fini (ou de l'ordre de p); pour n infini nous dirons que l'infini A est un point régulier de la solution. Si $y=x$ est effectivement une asymptote, le rapport entre la variation totale de la solution et l'intervalle de variation $x_n x_{n+p}$ est infini, même si la fonction y reste finie; nous dirons que l'infini A est un point de singularité essentielle pour les solutions, même pour celles qui sont finies et continues.

Nous voyons quelle variété des singularités se présente dans cette étude dont nous avons donné un aperçu.

SUR UN THÉORÈME CONCERNANT LES FONCTIONS AU CARRÉ SOMMABLE

Par Otton Nikodym, Warszawa

1. La note présente est consacrée à la démonstration du théorème suivant:

Si $f(x)$ est une fonction complexe, définie presque partout dans $\langle 0,1\rangle$ et au carré sommable, il existe dans $\langle 0,1\rangle$ un ensemble épais[1]) dont chaque point x_0 jouit de la propriété suivante:

$$\lim_n \frac{1}{x_n''-x_n'}\int_{x_n'}^{x_n''}|f(x)-f(x_0)|^2\,dx=0$$

quelles que soient les suites infinies $\{x_n'\}$, $\{x_n''\}$, où

$$0\leqslant x_n'<x_0<x_n''\leqslant 1,$$
$$\lim_n x_n'=\lim_n x_n''=x_0.$$

La démonstration qui va suivre est basée sur le théorème connu de Vitali (Überdeckungssatz).

Supposons, par impossible, que le théorème n'est pas vrai. Il existe alors un ensemble A, où mes ext $A>0$, tel que, si $x_0\in A$, il existe des suites infinies $\{x_n'\}$, $\{x_n''\}$, où $0\leqslant x_n'<x_0<x_n''\leqslant 1$, $x_n'\to x_0$, $x_n''\to x_0$ et il existe un nombre $a>0$, tels que

$$(1)\qquad \frac{1}{x_n''-x_n'}\int_{x_n'}^{x_n''}|f(x)-f(x_0)|^2\,dx>a,\qquad (n=1,2,\ldots).$$

---

[1]) C'est-à-dire, de mesure=1.

En vertu de l'axiome de M. Zermelo, on peut, à tout point $x_0 \epsilon A$, faire correspondre un couple de suites infinies $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$ et un nombre $\alpha = \alpha(x_0) > 0$ de manière que (1) ait lieu. Il existe certainement un sous-ensemble A' de A tel que $\text{mes ext}\, A' > 0$ et dans lequel $\alpha(x_0)$ surpasse un nombre positif fixe.

En effet, désignons par A_m l'ensemble $\hat{x}_0\{\alpha(x_0) > 1/m\}$.

Si l'on avait $\text{mes ext}\, A_m = 0$ pour chaque m, on aurait $\text{mes}\, A = \text{mes} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \text{mes}\, A_m = 0$, ce qui est impossible.

Soit donc $A' \subset A$ tel que $\text{mes ext}\, A' > 0$,

$$(2) \qquad \frac{1}{x''_n - x'_n} \int_{x'_n}^{x''_n} |f(x) - f(x_0)|^2 \, dx > \alpha' > 0$$

pour tout $x_0 \epsilon A'$ et pour des suites $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$ convenablement choisies pour chaque x_0.

2. La fonction $f(x)$ étant mesurable, on peut, d'après un théorème de M. N. Lusin, trouver pour chaque nombre $\sigma > 0$ un sousensemble parfait B_σ de $\langle 0, 1 \rangle$ dans lequel $f(x)$ est bornée et continue sur B_σ et par rapport à B_σ, et où

$$1 - \sigma < \text{mes}\, B_\sigma \leqslant 1.$$

Choisissons σ de manière qu'on ait

$$(3) \qquad \sigma < \text{mes ext}\, A'/2$$

et trouvons un ensemble B_σ parfait y correspondant. On a

$$(4) \qquad \text{mes ext}\, (A' B_\sigma) > 0,$$

car dans le cas contraire on aurait

$$\text{mes}\, (A' B_\sigma) = 0, \qquad A' = A' B_\sigma + A' \text{co} B_\sigma,$$
$$\text{mes ext}\, (A' \text{co} B_\sigma) \leqslant \text{mes}\, (\text{co} B_\sigma) < \sigma$$

ce qui donnerait

$$\text{mes ext}\, A' \leqslant \text{mes ext}(A' B_\sigma) + \text{mes ext}(A' \text{co} B_\sigma) \leqslant \sigma$$

et, par conséquent,

$$\text{mes ext}\, A' < \frac{\text{mes ext}\, A'}{2},$$

ce qui est absurde.

Posons

(5) $$A'' \underset{\mathrm{df}}{=} A'B_\sigma.$$

On a, d'après (4):

(6) $$\operatorname{mes\,ext} A''>0, \qquad A''\subset B_\sigma, \qquad A''\subset A'.$$

La fonction $f(x)$ étant continue sur B_σ et par rapport à B_σ, elle y est aussi uniformément continue. À fortiori $f(x)$ est uniformément continue sur A'' par rapport à A''.

3. La fonction $f(x)$ étant bornée sur B_σ, supposons que

$$|f(x)|\leqslant M \quad \text{sur} \quad B_\sigma.$$

Soit E un ensemble mesurable et soit $x_0\in A''$. On a

$$\int_E |f(x)-f(x_0)|^2\,dx=\int_E (\overline{f(x)}-\overline{f(x_0)})(f(x)-f(x_0))\,dx=$$
$$=\int_E |f(x)|^2\,dx+|f(x_0)|^2 \operatorname{mes} E-\int_E \overline{f(x_0)}f(x)\,dx-\int_E \overline{f(x)}f(x_0)\,dx,$$

d'où

$$\int_E |f(x)-f(x_0)|^2\,dx=\left|\int_E |f(x)-f(x_0)|^2\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_E |f(x)|^2\,dx+M^2 \operatorname{mes} E+2\sqrt{\int_E |f(x)|^2\,dx\cdot M^2 \operatorname{mes} E}$$

et, par conséquent,

(7) $$\int_E |f(x)-f(x_0)|^2\,dx\leqslant 2\int_E |f(x)|^2\,dx+2M^2 \operatorname{mes} E.$$

L'inégalité qui vient d'être obtenue montre que

$$\lim \int_E |f(x)-f(x_0)|^2\,dx=0$$

lorsque $\operatorname{mes} E\to 0$ et, de plus, que la dite convergence est uniforme. Cela veut dire que, étant donné un nombre $\eta'>0$, on peut trouver un nombre $\eta''>0$ tel que la relation $\operatorname{mes} E<\eta''$ entraîne:

$$\int_E |f(x)-f(x_0)|^2\,dx<\eta',$$

et cela quel que soit $x_0\in A''$.

4. La fonction $f(x)$ étant uniformément continue sur B_σ, on peut, en fixant un nombre $\varepsilon>0$ d'avance, trouver un nombre $\delta>0$ tel que, si $y_1-y_2<\delta$, $y_1\epsilon B_\sigma$, $y_2\epsilon B_\sigma$, on ait $|f(y_1)-f(y_2)|<\varepsilon$.

Les intervalles (x'_n, x''_n) enfermant les points x_0 de A'' [voir (2)], représentent une famille de VITALI [1]) pour A'', même si l'on suppose que $|x'_n-x''_n|<\delta$.

Donc, si l'on choisit un nombre $\eta>0$, on peut, d'après le théorème de VITALI, trouver une suite finie d'intervalles disjoints

(8) $$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$$

appartenant à la famille et tels que

(9) $$\sum_{i=1}^{k} \text{mes}\, \Delta_i - \eta \leqslant \text{mes ext}\, A'' \leqslant$$
$$\leqslant \text{mes ext}\,(A'' \cdot \sum_{i=1}^{k} \Delta_i) + \eta \leqslant \text{mes} \sum_{i=1}^{k} \Delta_i + \eta.$$

5. Aux intervalles (8) correspondent certaines points $y_1, \dots, y_k$ de l'ensemble A''.

En vertu de (2) on a:

$$\frac{1}{\text{mes}\, \Delta_i} \int_{\Delta_i} |f(x)-f(y_i)|^2 dx > \alpha'.$$

donc, d'après (9):

(10) $$\sum_{i=1}^{k} \int_{\Delta_i} |f(x)-f(y_i)|^2 dx > \alpha' \sum_{i=1}^{k} \text{mes}\, \Delta_i \geqslant \alpha' (\text{mes ext}\, A'' - \eta).$$

On peut écrire:

(11) $$\int_{\Delta_i} |f(x)-f(y_i)|^2 dx = \int_{\Delta_i \cdot B_\sigma} + \int_{\Delta_i - B_\sigma}.$$

Comme la longueur de Δ_i est $<\delta$, on a conformément à **4**,

$$\int_{\Delta_i B_\sigma} |f(x)-f(y_i)|^2 dx \leqslant 2 \int_{\Delta_i B_\sigma} \varepsilon^2\, dx \leqslant 2\varepsilon^2\, \text{mes}\, \Delta_i,$$

donc

(12) $$\sum_{i=1}^{k} \int_{\Delta_i B_\sigma} |f(x)-f(y_i)|^2 dx \leqslant 2\varepsilon^2.$$

[1]) Voir p. ex. S. Saks. *Zarys Teorii Całki.* Warszawa 1930, p. 46.

D'après (9):

$$\text{mes}(B_\sigma \sum_{i=1}^{k} \Delta_i) \geqslant \text{mes ext}(A'' \sum_{i=1}^{k} \Delta_i) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \text{mes}\, \Delta_i - 2\eta,$$

donc

$$\text{mes} \sum_{i=1}^{k} \Delta_i - \text{mes}\,(B_\sigma \sum_{i=1}^{k} \Delta_i) \leqslant 2\eta$$

et, par conséquent,

(13) $$\sum_{i=1}^{k} \text{mes}\,(\Delta_i - B_\sigma) \leqslant 2\eta.$$

En appliquant l'inégalité (7), on a

$$\int_{\Delta_i - B_\sigma} |f(x) - f(y_i)|^2 dx \leqslant 2 \int_{\Delta_i - B_\sigma} |f(x)|^2 dx + 2M^2 \text{mes}(\Delta_i - B_\sigma);$$

donc, d'après (13):

(14) $$\sum_{i=1}^{k} \int_{\Delta_i - B_\sigma} |f(x) - f(y_i)|^2 dx \leqslant 2 \int_{\sum_{i=1}^{k} (\Delta_i - B_\sigma)} |f(x)|^2 dx + 4M^2\eta.$$

Les inégalités (12) et (14) donnent, en vertu de (11),

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\Delta_i} |f(x) - f(y_i)|^2 dx \leqslant 2 \int_{\sum_{i=1}^{k} (\Delta_i - B_\sigma)} |f(x)|^2 dx + 4M^2\eta + 2\varepsilon^2.$$

Il en résulte, d'après (10):

(15) $$\alpha'(\text{mes ext}\, A'' - \eta) \leqslant 2 \int_{\sum_i (\Delta_i - B_\sigma)} |f(x)|^2 dx + 4M^2\eta + 2\varepsilon^2.$$

La fonction $f(x)$ étant au carré sommable, l'intégrale, figurant dans le membre droit tend uniformément vers 0 lorsque $\eta \to 0$, puisque, d'après (13), on a $\text{mes} \sum_{i=1}^{k} (\Delta_i - B_\sigma) \leqslant 2\eta$.

Les nombres $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ sont arbitraires. En les faisant tendre vers 0, on obtient de (15):

$$\alpha' \cdot \text{mes ext}\, A'' \leqslant 0;$$

donc mes ext $A'' = 0$ contrairement à (6). Le théorème est ainsi démontré.

6. Remarquons que le théorème analogue est valable pour les fonctions $f(x,y)$ de deux variables indépendantes, à condition qu'on remplace les intervalles (x'_n, x''_n) par des carrés centrés en x_0.

Le théorème démontré va trouver des applications dans des travaux ultérieurs de l'auteur, concernant les espaces de HILBERT.

Remarquons que, si $f(x)$ est continue et aux dérivées bornées, on peut démontrer, à l'aide du théorème classique de l'HOSPITAL, que

$$\lim_n \frac{1}{(x''_n - x'_n)^2} \int_{x'_n}^{x''_n} |f(x) - f(x_0)|^2 dx = 0$$

pour chaque $x_0 \epsilon (0,1)$.

COMPTES-RENDUS DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

1938

JANVIER—JUIN

ÉTAT DE LA SOCIÉTÉ

BUREAU CENTRAL

Président de la Société: Prof. Dr Stefan Mazurkiewicz.

Vice-Présidents de la Société: Présidents des Sections de Cracovie, de Lwów, de Poznań et de Wilno.

Secrétaire de la Société: Doc. Dr Bronisław Knaster.

Trésorier de la Société: Prof. Dr Władysław Orlicz.

Commission de Contrôle: Prof. Dr Samuel Dickstein, Prof. Dr Franciszek Leja, Prof. Dr Kazimierz Żórawski.

SECTION DE CRACOVIE

Président de la Section: Prof. Dr Stanisław Zaremba.

Vice-Président de la Section: Prof. Dr Franciszek Leja.

Secrétaire de la Section: Dr Stanisław Turski.

Trésorier de la Section: Doc. Dr Stanisław Gołąb.

Membres du Bureau de la Section: Prof. Dr Antoni Hoborski, Prof. Dr Witold Wilkosz, Doc. Dr Stanisław Krystyn Zaremba.

Commision de Contrôle: Dr Henryk Titz, Prof. Dr Tadeusz Ważewski, Ing. Dr Kazimierz Vetulani.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr Stanisław Zaremba, Prof. Dr Franciszek Leja, Doc. Dr Stanisław Gołąb, Prof. Dr Witold Wilkosz.

Suppléants des Délégués: Doc. Dr Aleksander Birkenmajer, Prof. Dr Antoni Hoborski.

SECTION DE LWÓW

Président de la Section: Prof. Dr Stanisław Ruziewicz.

Vice-Président de la Section: Doc. Dr Stefan Kaczmarz.

Secrétaire de la Section: Mgr Andrzej Turowicz.

Trésorier de la Section: Dr Edward Otto.

Membres du Bureau de la Section: Prof. Dr Stefan Banach, Doc. Dr Juliusz Paweł Schauder.

Commission de Contrôle: Prof. Dr Lucjan Grabowski, Prof. Dr Hugo Steinhaus.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr S. Banach, Doc. Dr S. Kaczmarz, Prof. Dr A. Łomnicki, Prof. Dr W. Orlicz, Doc. Dr J. Schauder.

SECTION DE POZNAŃ

Président de la Section: Prof. Dr Mieczysław Biernacki.

Vice-Président de la Section: Prof. Dr Władysław Smosarski.

Secrétaire de la Section: Dr Lidia Seipeltówna,

Trésorier de la Section: Dr Kazimierz Cwojdziński.

Membre du Bureau de la Section: Mgr Klara Krużycka.

Commission de Contrôle: Prof. Dr Józef Witkowski, Prof. Gimn. Andrzej Marconi.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr Zdzisław Krygowski, Doc. Dr Władysław Ślebodziński.

Suppléants des Délégués: Prof. Dr Józef Witkowski, Mgr Zygmunt Butlewski.

SECTION DE VARSOVIE

Président de la Section: Prof. Dr Kazimierz Kuratowski.

Vice-Président de la Section: Prof. Dr Stefan Straszewicz.

Secrétaire de la Section: Dr Edward Szpilrajn.

Trésorier de la Section: Doc. Dr Adolf Lindenbaum.

Membres du Bureau de la Section: Doc. Dr Karol Borsuk, Prof. Dr Stefan Mazurkiewicz, Prof. Dr Wacław Sierpiński.

Commission de Contrôle: Prof. Dr Samuel Dickstein, Prof. Dr Antoni Przeborski, Dr Aleksander Grużewski.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Doc. Dr Bronisław Knaster, Prof. Dr Kazimierz Kuratowski, Doc. Dr

Stanisław Saks, Prof. Dr Wacław Sierpiński, Prof. Dr Stefan Straszewicz.

Suppléants des Délégués: Doc. Dr Karol Borsuk, Dr Edward Szpilrajn, Doc. Dr Adolf Lindenbaum, Doc. Dr Kazimierz Zarankiewicz.

SECTION DE WILNO

Président de la Section: Prof. Dr Juliusz Rudnicki.

I Vice-Président (Trésorier): Prof. Dr Stefan Kempisty.

II Vice-Président (Secrétaire): Prof. Dr Antoni Zygmund.

Suppléant du Trésorier: Dr Mirosław Krzyżański.

Suppléant du Secrétaire: Mgr Konstanty Sokół-Sokołowski.

Commission de Contrôle: Prof. Dr Wacław Dziewulski, Prof. Dr Kazimierz Jantzen, Konstanty Matulewicz.

Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr Antoni Zygmund, Prof. Dr Stefan Kempisty.

Suppléant des Délégués: Prof. Dr Juliusz Rudnicki.

SÉANCES DES SECTIONS

SECTION DE CRACOVIE

12. I. 1938. Leja F. *Sur les polynômes généralisés de Tchebycheff.*

Démonstration de l'existence et de l'unicité du polynôme

$$T_n(z)=z^n+c_1z^{n-1}+\dots+c_n$$

qui correspond à un ensemble fermé et borné E de points du plan et à une fonction donnée $\Phi(z)$ et remplit la condition suivante:

$$\max_{z\in E}|\Phi(z)\cdot T_n(z)|\leqslant\max_{z\in E}|\Phi(z)\cdot P_n(z)|,$$

où $P_n(z)$ désigne un polynôme quelconque de la forme $z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_n$.

19. I. 1938 et 26. I. 1938. Mathison M. *Eine neue Lösungsmethode für Differentialgleichungen von normalem hyperbolischem Typus* [Math. Ann. **107** (1932), 400–419]; *Die parametrixmethode in Anwendung auf hyperbolische Gleichungssysteme* (Prace Mat.-Fiz. **41** (1933), 177–184].

23. II. 1938. Leja F. *Sur une nouvelle méthode d'approximation des fonctions continues* [ces Annales **17** (1938), p. 1–7].

Soient $f(x)$ une fonction réelle continue dans l'intervalle fermé $I=\langle a,b\rangle$, $\zeta=\{\zeta_0,\zeta_1,\dots,\zeta_n\}$ un système de $n+1$ points de I et

$$L_n^{(j)}(x,\zeta)=\frac{x-\zeta_0}{\zeta_j-\zeta_0}\cdot\ldots\cdot\frac{x-\zeta_{j-1}}{\zeta_j-\zeta_{j-1}}\cdot\frac{x-\zeta_{j+1}}{\zeta_j-\zeta_{j+1}}\cdot\ldots\cdot\frac{x-\zeta_n}{\zeta_j-\zeta_n}\qquad (j=0,1,\ldots,n).$$

Lorsque le système ζ varie dans I, la fonction

$$\sum_{i=0}^{n}|L_n^{(j)}(x,\zeta)\cdot e^{n\cdot\lambda\cdot f(\zeta_j)}|,$$

où λ est un paramètre réel, atteint pour chaque n et chaque x fixe (réel ou complexe) sa borne inférieure positive, qui sera désignée par $F_n(x,\lambda)$.

On montre que:

1⁰ *Pour chaque x réel ou complexe et chaque λ réel fixe, la suite*

$$1/n \log F_n(x,\lambda) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

tend vers une fonction-limite, harmonique dans le plan de x en dehors de l'intervalle I.

2⁰ *Il existe dans l'intervalle I la limite réitérée suivante, égale à $f(x)$:*

$$\lim_{\lambda\to 0} 1/\lambda\cdot[\lim_{n\to\infty} 1/n\cdot\log F_n(x,\lambda)]=f(x).$$

16. III. 1938. Zaremba S. K. *Sur l'indice de Kronecker* [C. R. Acad. Sc. Paris **206** (1938), 476–477; cf. plus loin, p. 110, Section de Lwów, séance du 26. II. 1938].

4. V. 1938. Popovici C. (Bucuresti). *Sur les équations intégro- et différentiello-fonctionnelles* [ces Annales **17** (1938), p. 67–90].

11. V. 1938. Leja F. *Sur une suite de fonctions rationnelles et la fonction de Green* [à paraître dans les Annales Acad. Sc. Techniques à Varsovie (1938)].

Soient: E un ensemble fermé et borné de points du plan, $\zeta=\{\zeta_0,\ldots,\zeta_n\}$ un système de $n+1$ points de E et $p(z)$ un polynôme ne s'annulant pas dans E. Posons

$$U(\zeta_0,\ldots,\zeta_n)=\left(\prod_{0\leqslant j<k\leqslant n}|\zeta_j-\zeta_k|\right)\cdot|p(\zeta_0)\cdot\ldots\cdot p(\zeta_n)|^{-n}.$$

Soit $\eta=\{\eta_0,\ldots\eta_n\}$ le système (ou l'un des systèmes) ζ satisfaisant aux conditions:

(1) $U(\eta_0,\ldots,\eta_n)=\max_{\zeta\in E} U(\zeta_0,\ldots,\zeta_n)$,

(2) $r_0\leqslant r_j$ pour $j=1,2,\ldots n$,

où $r_j=|(\eta_j-\eta_0)\cdot\ldots\cdot(\eta_j-\eta_{j-1})\cdot(\eta_j-\eta_{j+1})\cdot\ldots\cdot(\eta_j-\eta_n)|\cdot|p(\eta_j)|^{-n}$.

On démontre que la suite de fonctions rationnelles

$$R_n(z)=\frac{z-\eta_1}{\eta_0-\eta_1}\cdot\ldots\cdot\frac{z-\eta_n}{\eta_0-\eta_n}\cdot\left[\frac{p(\eta_0)}{p(z)}\right]^n$$

jouit des propriétés suivantes:

1° *Il existe en dehors de l'ensemble E la limite*

$$R(z) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|R_n(z)|},$$

2° *Lorsque* $p(z) = az + b$, *la fonction* $\log R(z)$ *est identique à la fonction de Green du domaine D ayant sa frontière dans l'ensemble E et contenant dans son intérieur le point-zéro du polynôme* $p(z)$.

18. V. 1938. Wilkosz W. *Sur la nature des surfaces de Riemann.*

25. V. et 8. VI. 1938. Skrzypkówna W. *Sur la géométrie intégrale.* Une revue des mémoires de MM. Blaschke, Santalo et des autres auteurs sur la géometrie intégrale.

1. VI. 1938. Lebesgue H. (Paris). *Sur la notion de volume et sur la dissection des polyèdres* [à paraître dans ces Annales **17** (1938)].

15. VI. 1938. Ważewski T. *Sur les intégrales premières des équations différentielles ordinaires* [ces Annales **16** (1937), p. 145—161].

SECTION DE LWÓW

15. I. 1938. Kaczmarz S. *Application des courbes sinusoïdales à la construction des routes* [à paraître dans les „Wiadomości Drogowe", Varsovie (en polonais)].

On applique à la construction des courbures de routes les lemniscates au lieu des clotoïdes, qui répondent exactement aux conditions du problème. L'auteur en donne une meilleure approximation à l'aide des courbes sinusoïdales, ce qui permet d'augmenter le nombre des conditions remplies par la courbure de la route. Le point initial de la courbure peut p. ex. être donné d'avance dans des limites assez vastes.

15. I. 1938. Mazur S. *De la théorie des espaces linéaires topologiques.*

I. Démonstration, en partant d'un th. de Tychonoff, que pour tout espace E de type (B) au sens de Banach: 1° dans l'espace de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans E, 2° dans celui de toutes les transformations linéaires de E en sous-ensembles de E (ces espaces étant considérés comme certains espaces topologiques), chaque ensemble totalement borné est bicompact.

II. Démonstration d'une condition nécessaire et suffisante pour que, dans l'espace $\overline{E}$ conjugué à E, toute fonctionnelle linéaire soit de la forme $f(x_0)$ où $f \epsilon \overline{E}$ et $x_0 \epsilon E$.

19. II. 1938. Banach S. *Sur la mesure dans les espaces abstraits.*

Dans l'espace des fonctions intégrables dont l'intégrale ne dépasse pas 1 en valeur absolue, il n'existe aucune mesure (non triviale) de Lebesgue, complètement additive et telle que les intégrales sur les segments n'empiétant pas les uns sur les autres soient deux à deux indépendantes (au sens de la terminologie probabiliste). Une interprétation de ce théorème dans le domaine de la mécanique statistique.

19. II 1938. Hetper W. *Sur l'algèbre des ensembles finis.*

Discussion des difficultés liées à la définition de la notion d'ensemble dans le système de la sémantique. La construction de l'algèbre des ensembles exige l'introduction d'une nouvelle espèce de variables et l'adoption de l'axiome sémanto-logique $\supset = \alpha\beta \equiv \alpha\beta$.

Or, dans beaucoup de problèmes jouant un rôle capital dans la construction du système de la sémantique, on est contraint de se servir des ensembles finis d'expressions. L'auteur montre que l'axiome en question est dans ce cas superflu, car tout ensemble fini d'expressions peut être obtenu comme celui des solutions de l'équation $\{I * Zx\}$ où I et Z sont des expressions constantes.

26. II. 1938. Zaremba S. K. *Contribution à la théorie de l'indice de Kronecker* [C. R. Acad. Paris **206** (1938), p. 476–477].

Soit C un champ vectoriel (continu) dans l'espace à $n+1$ dimensions ($n>1$) défini sur la sphère S^n à n dimensions et n'y admettant pas de points singuliers. T désignant le champ des composantes des vecteurs du champ C tangentes à S^n, les points singuliers par rapport à T sont les points dans lesquels le vecteur du champ C est normal à S^n. On peut donc distinguer parmi les points singuliers du champ T ceux dans lesquels le vecteur du champ C est dirigé vers l'extérieur et ceux où il l'est vers l'intérieur de S^n. Soit q la somme des indices de Kronecker de ces derniers points. On peut alors exprimer l'indice i du champ C sur S^n par la formule $i = 1-q$.

5. III. 1938. Mazur S. *Un théorème sur les points invariants.*

Soit E un espace linéaire topologique localement convexe dont l'élément-zéro admet une suite d'entourages ayant précisément cet élément pour partie commune. Alors, toute transformation continue d'un ensemble convexe et fermé quelconque $A \subseteq E$ en sous-ensemble bicompact admet un point invariant.

5. III. 1938. Kac M. *Sur les distributions invariantes.*

I. Introduction de la notion de distribution invariante.

II. Théorème: Si l'on a

$$f_1^2(t) + \ldots + f_n^2(t) = nK^2 \tag{1}$$

pour tout t, et si la distribution de la fonction

$$\frac{\xi_1 f_1(t) + \ldots + \xi_n f_n(t)}{\sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}} \tag{2}$$

ne dépend pas de $\xi_1, \ldots, \xi_n$, la distribution de chacune des fonctions f_i où $i = 1, \ldots, n$ est donnée par la formule de Borel

$$\underset{t}{E}[f_i(t)<\omega]|_R=\alpha\int\limits_{-K\sqrt{n}}^{\omega}\left(1-\frac{u^2}{1-nK^2}\right)^{\frac{3(n-1)}{2}}du.$$

Inversement, si la distribution de la fonction (2) ne dépend pas de $\xi_1,\dots,\xi_n$ et s'exprime par la formule de Borel, et si les fonctions $f_i(t)$ sont presque-périodiques, on a l'égalité (1).

III. Interprétations physiques des résultats acquis.

30. IV. 1938. Gillis P. *Un théorème du Calcul des Variations.*

Soient: D_n un domaine à n dimensions, borné, fermé et convexe, situé dans l'espace euclidien à n dimensions, D_{n-1} la frontière $(n-1)$-dimensionnelle de D_n, F une fonction de n variables aux deuxièmes dérivées partielles continues pour toutes les valeurs réelles des variables et $F_{p_i p_j} z^i z^j$ une forme quadratique définie positive. Il existe alors une et une seule fonction de n variables remplissant dans D_n la condition de Lipschitz et dont l'intégrale

$$I(z)=\int\limits_{D_n} F(p^i)\,dx^1 dx^2 \dots dx^n \quad \text{où} \quad p_i=\frac{\partial z}{\partial x^i} \qquad \text{pour } i=1,2,\dots,n$$

atteint son minimum par rapport à l'ensemble des fonctions z qui remplissent la condition de Lipschitz et prennent sur D_{n-1} les valeurs données d'avance, pourvu que ces dernières soient assujetties aux conditions:

(1) il existe une fonction remplissant la condition de Lipschitz dans D_n et prenant ces valeurs sur D_{n-1},

(2) Γ désignant l'image de la fonction $z(x^i)$ sur D_{n-1} dans l'espace à $n+1$ dimensions (x^i,z), la pente d'un hyperplan quelconque qui contient $n+1$ points distincts de Γ ne dépasse pas une valeur donnée.

14. V. 1938. Mazur S. *Sur la continuité des fonctionnelles dans les espaces topologiques.*

Soient: T un ensemble abstrait, E l'ensemble de toutes les fonctions réelles $x(t)$ définies pour $t\in T$ et dont la valeur absolue ne dépasse pas 1, enfin $P(x)$ une fonctionnelle définie dans E et continue en ce sens que si $x_n(t)\to x_0(t)$ pour tous les $t\in T$, on a $P(x_n)\to P(x_0)$.

Alors, si la puissance de T est inférieure au plus petit nombre cardinal inaccessible, T contient un ensemble T_0 tout au plus dénombrable et tel que les valeurs de $P(x)$ se trouvent déterminées par celles de la fonction $x(t)$ dans T_0, c. à d. que si $x_1(t)=x_2(t)$ pour tous les $t\in T_0$, on a $P(x_1)=P(x_2)$.

Ce théorème renferme comme cas particulier le th. de Banach-Kuratowski-Ulam sur l'existence des mesures complètement additives. L'auteur signale en outre quelques applications aux problèmes concernant les points invariants et quelques généralisations.

14. V. 1938. Kaczmarz S. et Turowicz A. *Sur les intégrales indéfinies irrationnelles* [à paraître dans Studia Math. 8 (1938)].

Soient: $f_1(x)$, $f_2(x)$... une suite des fonctions de variable réelle, finies et intégrables dans l'intervalle $\langle a,b\rangle$, et $\mathfrak{R}$ l'ensemble de toutes les fonctions d'une variable réelle de la forme $g(x)=R[f_1(x),f_2(x),...,f_k(x)]$ où R est une fonction rationnelle de k variables (avec k arbitraire). Alors, étant donné un intervalle quelconque $\langle\alpha,\beta\rangle$ où $a<\alpha<\beta<b$ (et même où $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$ si $a>-\infty$ ou $b<+\infty$), $\mathfrak{R}$ contient une fonction intégrable dans $\langle\alpha,\beta\rangle$ dont l'intégrale indéfinie n'appartient pas à $\mathfrak{R}$.

28. V. 1938. Lebesgue H. *Sur le calcul des côtés des polygones réguliers.*

L'auteur donne des formules pour l'évaluation des côtés des polygones réguliers convexes et étoilés, basées sur le théorème: l'égalité $a\pi=\pi(\eta_1/2+\eta_2/2^2+...)$, où les η_i sont des 0 où des 1, entraîne l'égalité

$$\cos a\pi = 2^{-1}\varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\varepsilon_3\sqrt{2+...}}}$$

où $\varepsilon_1=1-2\eta_1$, $\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2=1-2\eta_2$, $\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3=1-2\eta_3$, ...; la différence entre la valeur de cette racine infinie et celle de sa n-ième racine partielle ne dépasse pas $\pi/2^n$.

18. VI. 1938. Ulam S. *Sur les transformations ergodiques.*

Résultats des recherches communes de l'auteur et de M. J. Oxtoby. Toute variété topologique homéomorphe à un complexe régulier à $n\geqslant 2$ dimensions admet des transformations biunivoques conservant la mesure et *métriquement transitives*, c. à d. ne transformant en eux-mêmes que tout au plus des ensembles de mesure 0 et 1. Etant donnée une homéomorphie quelconque F conservant la mesure, il existe des transformations T arbitrairement voisines de F et telles que, pour toute transformation G, la transformation GTG^{-1} est métriquement transitive.

25. VI. 1938. Mazur S. *Sur les anneaux linéaires.*

Théorème I. Un anneau linéaire $\mathfrak{A}$ à une infinité de dimensions, sans diviseurs du zéro, contient (à une isomorphie près) l'anneau des polynômes nuls pour $x=0$; si $\mathfrak{A}$ possède une unité, il contient (à une isomorphie près) l'anneau de tous les polynômes; si $\mathfrak{A}$ est un corps (non nécessairement commutatif), il contient (à une isomorphie près) le corps de toutes les fonctions rationnelles.

Théorème II. Si, dans un anneau linéaire $\mathfrak{A}$, une norme est définie, satisfaisant—outre des conditions habituelles—à la condition $\|A\cdot B\|=\|A\|\cdot\|B\|$, l'anneau $\mathfrak{A}$ équivaut (c. à d. peut être représenté en conservant les opérations et la norme) soit au corps des nombres réels, soit à celui des nombres complexes, soit au corps des quaternions réels; si $\mathfrak{A}$ est un corps (non nécessairement commutatif) et la norme satisfait à la condition plus faible $\|A\cdot B\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$, il est isomorphe (c. à d. représentable homéomorphiquement avec conservation des opérations) à un des trois corps mentionnés.

Corollaire. A étant une transformation linéaire d'un espace E de type (B) en une partie de E, ils existent deux nombres réels α et β tels que soit l'équation $A^2(x)+\alpha\cdot A(x)+\beta\cdot x=y$ ne possède de solution pour certains

$y \in E$, soit l'équation homogène $A^2(x)+\alpha\cdot A(x)+\beta\cdot x=0$ possède une solution non nulle.

30. VI. 1938. Pepis J. *Sur une famille d'ensembles plans et les solutions de l'équation fonctionnelle $F(x,z)=F(x,y)\cdot F(y,z)$ pour $0\leqslant x\leqslant y\leqslant z$. Application à la théorie générale des intérêts.*

I. Soient A_α, B_α, C_α, D_α les ensembles plans des points, dont les coordonnées satisfont aux conditions: $0\leqslant x\leqslant \alpha\leqslant y$; $0\leqslant x\leqslant \alpha\leqslant y$; $0\leqslant x\leqslant \alpha\leqslant y$, $x\neq y$; $0\leqslant x\leqslant \alpha\leqslant y$ respectivement. Soit Ω la plus étroite famille d'ensembles plans, contenant tous les ensembles A_α, B_α, C_α, D_α $(\alpha\geqslant 0)$ et les sommes quelconques (finies, infinies ou même indénombrables) de ces ensembles.

Théorème. *Toutes les solutions de l'équation fonctionnelle $F(x,z)=$ $=F(x,y)\cdot F(y.z)$ où $0\leqslant x\leqslant y\leqslant z$ sont données par la formule $F(x,y)=$ $=g(y)/g(x)(1-\psi(x,y))$, où $g(x)$ est une fonction arbitraire non nulle pour tous les x et $\psi(x,y)$ est la fonction caractéristique d'un ensemble arbitraire de la famille Ω.*

II. Appelons: *nombre singulier de I espèce* d'une solution donnée F tout nombre $x\geqslant 0$ tel que $F(x,y)=0$ pour $0\leqslant y<x$; *nombre singulier de II espèce* de la solution F tout nombre $x\geqslant 0$ tel que $F(x,y)=0$ pour $y>x$; *nombre frontière* de F, tout nombre $x\geqslant 0$ tel que $F(x,x)=0$. Désignons respectivement par M, N et R les ensembles des nombres ainsi définis, et par Z celui des points (x,y) tels que $F(x,y)=0$ pour la solution F. On a alors

$$Z=\sum_{\alpha\in(N-M)} A_\alpha+\sum_{\alpha\in(M-N)} B_\alpha+\sum_{\alpha\in(M\cdot N)} C_\alpha+\sum_{\alpha\in(M\cdot N\cdot R)} D_\alpha.$$

L'ensemble M est fermé à gauche et l'ensemble N l'est à droite. Les lacunes de la dérivée de M sont dans l'ensemble N et celles de la dérivée gauche de N dans M. Par conséquent l'ensemble $M+N$ est fermé.

III. L'auteur soumet à une critique la théorie des intérêts et propose une *théorie des entreprises à conjoncture variable.* En admettant la seule hypothèse, à savoir que la valeur au moment t_2 d'un capital k emprunté au moment $t_1\leqslant t_2$ ne dépend pas de la personne qui prête, mais seulement de t_1, t_2 et k (l'hypothèse de non-protection), et désignant cette valeur par $f(t_1,k,t_2)$, on a;

(1) $$f(t_1,k_1+k_2,t_2)=f(t_1,k_1,t_2)+f(t_1,k,t_2),$$

(2) $$f(t_1,k,t_3)=f(t_2,f(t_1,k,t_2),t_3).$$

(3) $$f(t_1,k,t_2)\geqslant 0.$$

En appliquant le théorème connu sur l'équation $f(x+y)=f(x)+f(y)$ et le théorème sur l'équation $F(x,z)=F(x,y)\cdot F(y,z)$, énoncé dans I, la solution générale est de la forme

$$f(t_1,k,t_2)=kg(t_2)/g(t_1)(1-\psi(t_1,t_2)),$$

où $g(t)$ est une fonction positive et $\psi(t_1,t_2)$ la fonction caractéristique d'un ensemble de la famille Ω.

En supposant que $f(t_1,k,t_2)>0$, on a la *théorie des entreprises sans*

faillites: on a alors $f(t_1,k,t_2)=kg(t_2)/g(t_1)$, où la fonction positive $g(t)$ donne l'ainsi dite *courbe de conjoncture*.

En supposant que $f(t_1,k,t_2)$ dépend seulement de k et de (t_2-t_1), on a *la théorie des entreprises à conjoncture constante*. On a alors:

(1′) $$f(k_1+k_2,t)=f(k_1,t)+f(k_2,t),$$

(2′) $$f(k,t_1+t_2)=f(f(k,t_1),t_2),$$

(3′) $$f(k,t)\geqslant 0.$$

En supposant qu'il n'y a pas de faillite, c. à d. que $f(k,t)>0$, on obtient $g(t)=a^t$, c. à d. $f(t_1,k,t_2)=ka^{t_2-t_1}$.

Soit $D(k,t)=f(k,t)-k$. En supposant que l'intérêt de l'intérêt est presque nul, c. à d. que $D(D(k,t_1),t_2)=0$, on obtient la *formule d'intérêt simple*. Les formules d'intérêt simple et composé sont des formules approximatives, puisque la formule $D(D(k,t_1),t_2)=0$ n'est qu'une approximation.

Dans la formule générale de la théorie des entreprises à conjoncture variable avec des faillites, les courbes $g(t)$ sont des courbes de conjoncture. Au moment de la faillite ces dernières peuvent indiquer les valeurs: 0 et 1, la courbe $g(t)$ indiquant en ce moment toujours la valeur 1. Les nombres singuliers de I et II espèce donnent respectivement les moments de la faillite ordinaire et de la faillite véhémente.

SECTION DE POZNAŃ.

14. II. 1938. Gospodarek S. *Sur certaines démonstrations géométriques de Galilée.*

Exemples des raisonnements géometriques extraits des „*Discorsi*" et leurs simplifications par les méthodes de la géométrie analytique. Remarques historiques concernant la vie de Galilée, son conflit tragique avec la Sainte Inquisition et son oeuvre scientifique en général.

15. III. 1938. Mikusiński J. *Ein Referat über die Arbeit von G. Pólya: „Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen", Acta Math. 68 (1937), 145–254.*

15. V. 1938. Zawirski Z. *Descartes comme philosophe et mathématicien*

I. Quelques détails biographiques. Système métaphysique de Descartes. Son attitude rationaliste dans l'épistémologie: son plan d'embrasser toute la science humaine dans un système déductif, réalisé pour sa métaphysique (*Méditations*, réponses à Mersenne) et tenté pour les sciences naturelles (*Principia*).

II. Géometrie de Descartes. Problème de Pappus, par lequel il l'avait commencé et sa méthode de solution.

SECTION DE VARSOVIE.

14. I. 1938. Sierpiński W. *Fonctions additives non complètement additives et fonctions non mésurables* [Fund. Math. **30** (1938), p. 96–99].

14. I. 1938. Mostowski A. *Bericht aus einem Satz von Gödel über die Widerspruchsfreiheit des Auswahlaxioms.*

21. I. 1938. Sierpiński W. *Sur une transformation de l'intervalle.*

21. I. 1938. Szpilrajn E. *Concerning convergent sequences of sets.*

The author has proved before that 1^0 there exists a sequence of sets (contained in the interval $I=\langle 0,1\rangle$) equivalent to no sequence of projective sets, and 2^0 there exists a sequence of projective sets equivalent to no sequence of Borel sets [1]). The following theorem deals with an analogous problem concerning particularly sequences which are *convergent* in the sense of the General Theory of Sets:

In order that every convergent sequence of sets (contained in I) be equivalent to a sequence of Borel sets (or else: of sets which are simultaneously F_σ- and G_δ-sets) it is necessary and sufficient that the hypothesis of the continuum be true.

Necessity. Let E be any subset of I. The sequence $E,E,...$ is convergent and therefore it is equivalent to a sequence $B,B,...$, where B is a Borel set. Hence $\overline{\overline{E}}=\overline{\overline{B}}$, and consequently either $\overline{\overline{E}}\leqslant\aleph_0$ or $\overline{\overline{E}}=\mathfrak{c}$.

Sufficiency. It can be deduced from certain theorems on the characteristic function of a sequence of sets [2]) and from the following remarks eacy to show:

1. A sequence of sets is convergent if and only if its characteristic function assumes only values of the form $m/3^n$.

2. Let f be a real function which transforms I into a set at most enumerable. If the hypothesis of the continuum is true, then there exists a real function g of the first class, defined on I and such that $\overline{\overline{f^{-1}(y)}}=\overline{\overline{g^{-1}(y)}}$ for each real number y.

21. I. 1938. Nikliborc W. *Über das Dreikörperproblem III.*

4. II. 1938. Waraszkiewicz Z. *Sur une propriété caractéristique de l'arc simple.*

Soient: K un continu métrique, $\mathfrak{K}$ l'hyperespace des sous-continus de K, K_t le sous-continu de K qui correspond à l'élément t de $\mathfrak{K}$; en particulier soit $K_1=K$. Un sous-continu K_{t_0} de K est appelé *rétracte topolo-*

[1]) Fund. Math. **26** (1936), 316 and 313.

[2]) Fund. Math. **26** (1936), 311 and 307.

gique de K s'il existe dans $\mathfrak{K}$ un continu $\mathfrak{K}_0$ unissant les éléments 1 et t_0 et une fonction $F(x,t)$, continue par rapport à l'ensemble des variables $x \epsilon K$ et $t \epsilon \mathfrak{K}$, telle que:

1° pour tout $t \epsilon \mathfrak{K}$ et $x \epsilon K_t$, $F(x,t)$ est une transformation homéomorphe de K_t en K_{t_0},

2° $F(x,t_0)=x$ pour tout $x \epsilon K_{t_0}$.

L'auteur démontre le théorème suivant:

Parmi les continus plans, l'arc simple est caractérisé par la propriété que chacun de ses sous-continus (ne se réduisant à un point) est son rétracte topologique.

La démonstration repose sur l'analyse des courbes, dites *apparentées avec l'arc simple,* qui se laissent ε-déformer en un arc simple (pour tout $\varepsilon > 0$).

11. II. 1938. Sierpiński W. *Sur une propriété des espaces métriques séparables* [Fund. Math. **30** (1938), 129–131].

11. II. 1938. Kuratowski K. *Sur la compactification des espaces à connexité n-dimensionnelle* [Fund. Math. **30** (1938), 242–246].

11. II. 1938. Mazurkiewicz S. *Sur les continus indécomposables.*

25. II. 1938. Szpilrajn E. *On the equivalence of some classes of sets* [Fund. Math. **30** (1938), 235–241].

25. II. 1938. Rothberger F. (Wien). *Eine Äquivalenz zwischen der Kontinuumhypothese und der Existenz der Lusinschen und Sierpińskischen Mengen* [Fund. Math. **30** (1938), 215–217].

18. III. 1938. Sierpiński W. *Sur un problème concernant les familles d'ensembles parfaits* [Fund. Math. **31** (1938), 1–3].

18. III. 1938. Gillis P. (Bruxelles). *Sur les théorèmes d'existence du Calcul des Variations.*

La méthode directe, qu'utilisa A. Haar pour démontrer l'existence d'une solution du problème

$$\iint_D F(\mathfrak{z}_x, \mathfrak{z}_y)\,dx\,dy = \text{minimum}\left(\mathfrak{z}_x = \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{z}(x,y),\ \mathfrak{z}_y = \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{z}(x,y)\right),$$

supposé régulier, peut être appliquée à d'autres problèmes plus généraux. On peut notamment, de cette manière, démontrer l'existence d'une solution du problème

$$\int_{D_n} F(\mathfrak{z}_{x^i})\,dx' \dots dx^n = \text{minimum}\left(F(\mathfrak{z}_{x^i}) = F\left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x'}, \dots \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x^n}\right)\right)$$

lorsque la forme quadratique figurant sous le signe de la variation seconde est supposée définie positive.

25. III. 938. **Mostowski A.** *Über gewisse universelle Relationen.*

Als *Relation* bezeichnen wir jede Menge r von geordneten Paaren $\langle x,y\rangle$. Die Menge $|r|$, welche aus den Hintergliedern und den Vordergliedern aller Paare $\langle x,y\rangle \epsilon r$ besteht, heißt *Feld* von r. Zwei Relationen r und s heißen *isomorph*, in Zeichen $r \sim s$, wenn es eine Funktion f gibt, die $|r|$ auf $|s|$ eineindeutig abbildet, und zwar so, daß die Bedingungen $\langle x,y\rangle \epsilon r$ und $\langle f(x),f(y)\rangle \epsilon s$ für beliebige $x,y \epsilon |r|$ äquivalent sind.

Wir setzen für jede Relation r und beliebige Mengen $m,n \subset |r|$:

$$r_m = \underset{\langle x,y\rangle}{E}[y \epsilon m]\cdot r, \qquad r^n = \underset{\langle x,y\rangle}{E}[x \epsilon n]\cdot r, \qquad r_m^n = (r_m)^n.$$

Eine Relation r nennen wir *universell* für das System $\mathfrak{S}$ von Relationen, wenn $r \epsilon \mathfrak{S}$ und es für jedes $s \epsilon \mathfrak{S}$ eine Menge $m \subset |r|$ gibt, so daß $s \sim r_m^m$. Wir wollen hier auf die Existenz universeller Relationen für gewisse Systeme von Relationen mit abzählbarem Feld hinweisen; und zwar sind es folgende Systeme:

($\mathfrak{K}$) das System der transitiven und areflexiven Relationen r mit $\overline{\overline{|r|}} \leqslant \aleph_0$;

($\mathfrak{L}$) das System der transitiven und reflexiven Relationen r mit $\overline{\overline{|r|}} \leqslant \aleph_0$.

($\mathfrak{L}^*$) das System der Relationen $r \epsilon \mathfrak{L}$, welche der Bedingung genügen:

(*) ist $\langle x,y\rangle \epsilon r$ und $\langle y,x\rangle \epsilon r$, so ist $x=y$;

($\mathfrak{M}$) das System der transitiven Relationen r mit $\overline{\overline{|r|}} \leqslant \aleph_0$;

($\mathfrak{M}^*$) das System der Relationen $r \epsilon \mathfrak{M}$, die der Bedingung (*) genügen.

Um unsere Sätze auszudrücken, führen wir noch folgende Bezeichnungen ein: $\{X\}$, bzw. $[X]$, bezeichnet für jedes Mengensystem X die Menge der Paare $\langle x,y\rangle$, wo $x,y \epsilon X$ und $x \subset y$, bzw. $x \subset y$ und $y \neq x$, ist, K_0 bezeichnet das System, das aus Summen von endlich vielen linksseitig abgeschlossenen und rechtsseitig offenen Intervallen mit rationalen Endpunkten besteht; L_0 bezeichnet das System, das aus Summen von endlich vielen linksseitig abgeschlossenen und rechtsseitig offenen Intervallen besteht, deren Endpunkte von der Form $\frac{p}{q}\sqrt{2}$ (p,q natürliche Zahlen) sind.

Schließlich wird für jede Relation r mit r' die Menge der Paare $\langle\langle x,p\rangle, \langle y,q\rangle\rangle$ bezeichnet, wo $\langle x,y\rangle \epsilon r$ und p,q natürliche Zahlen sind.

Unsere Sätze lauten nun folgendermaßen:

I. *Ist $r \epsilon \mathfrak{M}$, so gibt es disjunkte Mengensysteme K und L derart, daß $r \sim \{K\} + [K+L]_L^K + [K+L]_K^L + [L]$; dabei ist dann und nur dann $r \epsilon \mathfrak{K}$ bzw. $r \epsilon \mathfrak{L}^*$, wenn $K=0$ bzw. $L=0$ ist.*

Man setzt nämlich $n(x) = \underset{y}{E}[\langle y,x\rangle \epsilon r]$ für $x \epsilon |r|$ und

$$K = \underset{n(x)}{E}[\langle x,x\rangle \epsilon r], \qquad L = \underset{n(x)}{E}[\langle x,x\rangle \text{ non } \epsilon r].$$

II. *Die Relation $[K_0]$ ist universell für $\mathfrak{K}$.*

III. *Die Relation $\{L_0\}$ ist universell für $\mathfrak{L}^*$.*

II und III ergeben sich leicht aus I und aus einem früher von mir bewiesenen Satz [Fund. Math. 29 (1937), 53, Satz 17]. Etwas komplizierteres induktives Verfahren führt zum Satz:

IV. *Die Relation* $[K_0]+\{L_0\}$ *ist universell für* $\mathfrak{M}^*$.

Aus III und IV leitet man noch ganz leicht folgende Sätze ab:

V. *Die Relation* $\{L_0\}'$ *ist universell für* $\mathfrak{L}$.

VI. *Die Relation* $([K_0]+\{L_0\})'$ *ist universell für* $\mathfrak{M}$.

1. IV. 1938. Marcinkiewicz J. *Sur les fonctions caractéristiques analytiques* [voir *Sur les fonctions indépendantes III*, Fund. Math. 31 (1938), 86-102].

1. IV. 1938. Eilenberg S. *Remarque sur les transformations de Fourier.*

Soit $A(L^2)\subset L^2$ une opération linéaire. Pour que l'on ait $A[A(a)]=a$ et $\|A(a)\|=\|a\|$, quel que soit $a\in L^2$, il faut et il suffit qu'il existe deux suites $a_1, a_2, \ldots$ et $b_1, b_2, \ldots$ (dont l'une peut être finie) formant ensemble un système orthogonal, normal et complet pour L^2 et telles que l'on ait $A(a_i)=a_i$ et $A(b_i)=-b_i$ pour $i=1,2,\ldots$

1. IV. 1938. Eilenberg S. et Otto E. *Quelques propriétés de la dimension* [Fund. Math. 31 (1938), 149-153].

22. IV. 1938. Sierpiński W. *Compte-rendu du voyage en Italie.*

29. IV. 1938. Eilenberg S. *Sur le prolongement des transformations continues en surfaces sphériques* [Fund. Math. 31 (1938), 179-200].

29. IV 1938. Jaśkowski S. *Über die Entscheidbarkeit der allgemeinen Topologie.*

6. V. 1938. Kuratowski K. *Sur une propriété des décompositions semi-continues.*

Soient: X un sous-ensemble fermé du cube (compact) de Hilbert, f une transformation continue de X en un espace $Y=f(X)$ et α un nombre réel tel que $\delta f^{-1}(y)<\alpha$, quel que soit $y\in Y$. Il existe alors une homéomorphie h telle que $|hf(x)-x|<\alpha$.

Soit $\beta>0$ tel que la condition $\delta(E)<\beta$ entraîne $\delta f^{-1}(E)<\alpha$. Soit $Y=G_0+\ldots+G_m$ une décomposition en ensembles ouverts non vides et tels que $\delta(G_i)<\beta/2$. Soit $x_i\in H_i=f^{-1}(G_i)$. Considérons la fonction $\varkappa$ correspondante aux systèmes $\{G_i\}$ et $\{x_i\}$ [1]), c. à d. la fonction

$$\varkappa(y)=\lambda_0(y)\cdot x_0+\ldots+\lambda_m(y)\cdot x_m \quad \text{où} \quad \lambda_i(y)=\frac{\varrho(y,Y-G_i)}{\varrho(y,Y-G_0)+\ldots+\varrho(y,Y-G_m)}.$$

---

[1]) Cf. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne 3, Warszawa-Lwów 1933, p. 94.

Il vient $|\varkappa f(x)-x|<\alpha$. En effet, $i_0, \dots, i_k$ désignant le système de tous les indices pour lesquels $x \in H_{i_j}$, le point $\varkappa f(x)$ appartient au simplexe $x_{i_0} \dots x_{i_k}$ et le diamètre du simplexe $x x_{i_0} \dots x_{i_k}$ est $<\alpha$, car $G_{i_j} \cdot G_{i_l} \neq 0$, donc $\delta(G_{i_j}+G_{i_l})<\beta$, d'où $\delta(H_{i_j}+H_{i_l})<\alpha$.

Chaque transformation continue de Y en le cube de Hilbert (plus précisément: en un cube à $>2 \dim Y$ dimensions) pouvant être approchée par une homéomorphie, on peut prendre pour h une homéomorphie telle que $|h(x)-\varkappa(x)|<\alpha-|\varkappa f(x)-x|$ quel que soit x. C. Q. F. D.

On voit ainsi que *l'hyper-espace d'une décomposition semi-continue de X à tranches de diamètre $<\alpha$ peut être obtenu de X par un déplacement $<\alpha$.* C'est une généralisation du th. de M. Eilenberg (C. R. Paris **200** (1935), p. 1003) sur l'équivalence entre les invariants topologiques des transformations à petites tranches et les invariants des petits déplacements.

6. V. 1938. Szpilrajn E. *On the isomorphism and the equivalence of classes and sequences of sets.*

The author considers some (1-1) correspondences between *classes of sets*, viz: (1) *weak isomorphism*, i. e. the similarity of these classes considered as sets partially ordered by the relation of inclusion; (2) *isomorphism* („isomorphie algébro-logique" in the sense of Kuratowski-Posament[1]); (3) *total isomorphism* (the notion analogous to the preceding, obtained by replacing the finite addition by the addition of an arbitrary finite or transfinite number of sets); (4) *equivalence*[2]). The notions (1)-(4) concern also *sequences* of sets.

The author obtains the following theorem:

Th. 1. If K and L are two weakly isomorphic classes of subsets of two abstract spaces and if each one-element subset of these spaces belongs respectively to K and L, then K and L are equivalent.

As simple consequences of Th. 1 the author derives what follows:

Th. 1.1. Two topological spaces are homeomorphic if and only if the classes of the closed sets in these spaces are weakly isomorphic.

Th. 1.2. There exists a generalized homeomorphism (in the sense of Kuratowski) *between two topological spaces if and only if the classes of Borel sets in these spaces are weakly isomorphic.*

Th. 1.3. The class of the measurable sets (in the interval $I=\langle 0,1\rangle$) and that of the sets possessing the property of Baire in the wide sense (in I) are not weakly isomorphic[3]).

Denoting by C Cantor's discontinuum and by $c_e(x)$ the characteristic function of a sequence of sets $e=\{E_n\}$ i. e. $c_e(x)=(0, i_1 i_2 \dots)_3$, where $i_n=0$ if $x \bar{\in} E_n$ and $i_n=2$ if $x \in E_n$, the author proves:

---

[1]) Fund. Math. **22** (1934), p. 282.

[2]) See e. g. Fund. Math. **30** (1938), p. 237. Cf. also M. H. Stone, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), p. 91.

[3]) It is the consequence of Th. 2 and of theorem proved by the author in Fund. Math. **22** (1934), p. 306.

Th. 2. Two sequences: $a=\{A_n\}$ of subsets of X and $b=\{B_n\}$ of subsets of Y are (i) *isomorphic,* (ii) *totally isomorphic,* (iii) *equivalent, if and only if* (i') $\overline{c_a(X)}=\overline{c_b(Y)}$, (ii') $c_a(X)=c_b(Y)$, (iii') $\overline{\overline{c_a^{-1}(t)}}=\overline{\overline{c_b^{-1}(t)}}$ *for each* $t\epsilon C$.

With the help of Th. 2 and of some properties of the characteristic function[1]), the author proves what follows:

Th. 2.1. The sequence u of all sets simultaneously closed and open in C is universal in the sense of isomorphism, i. e. *for every sequence e of sets, there exists a sequence of sets belonging to u which is isomorphic to e* (Mostowski-Kuratowski).

Th. 2.2. There exists no sequence of sets universal in the sense of total isomorphism.

Th. 2.3. A sequence e of subsets of X is totally isomorphic to a sequence of Borel subsets of I if and only if the set $c_e(X)$ is analytic.

Th. 2.4. There exists: (i) *a sequence of sets totally isomorphic to a certain sequence of Borel sets but equivalent to no sequence of Borel sets*; (ii) *a sequence of projective sets totally isomorphic to no sequence of Borel sets*; (iii) *a sequence of sets totally isomorphic to no sequence of projective sets.*

13. V. 1938. Charpentier M. (Paris). *Sur les points de Peano de certains systèmes d'équations différentielles* [C. R. Acad. Paris **206** (1938), 1347–1349].

13. V. 1938. Szpilrajn E. *On the space of measurable sets.*

Let μ denote an abstract measure, i. e. an $\aleph_0$-additive, non negative function of a set, defined for the sets belonging to an $\aleph_0$-additive and complementative class $\boldsymbol{M}$ of subsets of an abstract space X; furthermore we suppose $\mu(X)=1$.

Putting $\varrho(M_1, M_2)=\mu[(M_1-M_2)+(M_2-M_1)]$ and identifying such sets M, M' for which $\varrho(M, M')=0$, one obtains a metrical space $\mathfrak{M}(\mu)$ (Fréchet). $\mathfrak{M}(\mu)$ can be considered also as a Boolean algebra (the quotient of $\boldsymbol{M}$ and of the ideal of sets of measure μ zero).

Let μ_1 and μ_2 be two abstract measures. The author shows that the spaces $\mathfrak{M}(\mu_1)$ and $\mathfrak{M}(\mu_2)$ are isometric if and only if the algebras $\mathfrak{M}(\mu_1)$ and $\mathfrak{M}(\mu_2)$ are isomorphic in such a manner that, for the corresponding elements of these algebras, the values of μ_1 and μ_2 are equal.

Definition. Two abstract measures μ_1 and μ_2 are called *isomorphic* whenever the spaces $\mathfrak{M}(\mu_1)$ and $\mathfrak{M}(\mu_2)$ are isometric.

Theorems: I. *An abstract measure μ is isomorphic to the measure of Lebesgue* (in the interval $I=\langle 0,1\rangle$) *if and only if*:

1° *the metrical space $\mathfrak{M}(\mu)$ is separable,*

2° *for each set M such that $\mu(M)>0$ there exists a set $M'\subset M$ such that* $0<\mu(M')<\mu(M)$.

[1]) Fund. Math. 26 (1936), pp. 308 and 307.

II. *An abstract measure* μ *is isomorphic to the measure of Lebesgue considered for a class of measurable subsets* (but not necessarily all) *of* I *if and only if the metrical space* $\mathfrak{M}(\mu)$ *is separable.*

The proofs are simple; they make use of some properties of the characteristic function of a sequence of sets.

Th. I can be deduced also from another characterization of the measure of Lebesgue, due to S. Jaśkowski (unpublished; presented to the Polish Math. Society in 1932 [1])].

20. V. 1938. Szpilrajn E. *On some singular sets* [Cf. *The caracteristic function of a sequence of sets and some of its aplications*, Fund. Math. **31** (1938), § 4].

20. V. 1938. Borsuk K. (présenté par Knaster B.) *Sur un problème de MM. Kuratowski et Ulam* [Fund. Math. **31** (1938)].

27. V. 1938. Kozakiewicz W. *Sur un théorème asymptotique du Calcul des Probabilités.*

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une suite de variables aléatoires. Posons pour x et t réels:

$$F_n(x) = P\{x_n \leqslant x\}, \qquad \varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(x).$$

$F_n(x)$ est la loi de probabilité de la variable x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ et $\varphi_n(t)$ la fonction caractéristique correspondante. Soit en outre:

$$F_n(x) = F(x)$$

et par conséquent

$$\varphi_n(t) = \varphi(t). \qquad n = 1, 2 \ldots$$

Introduisons les notations suivantes:

$$a_s = \mathcal{E}(x_n^s), \qquad b_s = \mathcal{E}(|x_n|^s),$$

ou $\mathcal{E}$ désigne l'espérance mathématique, et posons:

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = 1.$$

Supposons que le moment b_k pour l'entier fixe $k \geqslant 3$ existe. Si la fonction caractéristique $\varphi(t)$ satisfait à la condition

$$\text{(C)} \qquad \limsup_{t \to +\infty} |\varphi(t)| < 1,$$

on a d'après le théorème de M. Cramér [2]) $\Phi_n(x) = F_n(x) + R_n(x)$, où $\Phi_n(x)$ est la loi de probabilité de la variable $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\sqrt{n}}$, $F_n(x)$ est une forme

---

[1]) Annales Soc. Pol. Math. 12 (1933), p. 122.

[2]) H. Cramér, *Random Variables and Probability Distribution*, Cambridge 1937, p. 81.

linéaire des dérivées de la fonction de Gauss dont les coefficients ne s'expriment que par les moments $a_1=0,\ldots, a_{k-1}$ et $\sup_x R_n(x)=O(1/n^{(k-2)/2})$.

Considérons la fonction réelle $V(x)$ satisfaisant aux conditions:

(A₁) $$V(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} V(x)=0, \qquad V(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} V(x)=1$$

$$b'_k=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^k|dV(x)|<+\infty. \qquad a_i=\int_{-\infty}^{+\infty}x^i dV(x), \qquad i=1.2,\ldots,k-1.$$

(A₂) La dérivée, $V'(x)$ existe, est continue et l'on a $|V'(x)|\leq N$ pour chaque x, N ne dépendant pas de x.

(A₃) $V(x)$ est à variation bornée dans l'intervalle infini $\langle-\infty,+\infty\rangle$.

Posons par induction:

$$V_2(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}V(x-\zeta)\,dV(\zeta), \qquad V_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}V_{n-1}(x-\zeta)\,dV(\zeta).$$

Théorème I. *Si la fonction caractéristique* $\varphi(t)$ *satisfait à la condition* (C), *on a*

$$\sup_x |\Phi_n(x)-V_n(x\sqrt{n})|=O(1/n^{(k-2)/2}).$$

Le th. I est plus général que celui de M. Cramér. Posons p. ex. pour $k=4$ et $0<a_3<4$:

$$V'(x)=\begin{cases} f(x,a_3)=c(x+2/a_3)^{4/a_3^2-1}e^{-2x/a_3} & \text{pour } x\geq-2/a_3 \\ f(x,a_3)=0 & \text{pour } x\leq-2/a_3\end{cases}$$

où $f(x,a_3)$ désigne la loi élémentaire de probabilité de Pearson déterminée par les trois premiers moments $a_1=0$, $a_2=1$ et a_3, et c est définie par la relation $\int_{-\infty}^{\infty}f(x,a_3)\,dx=1$. On obtient alors

$$\sup_x |\Phi_n(x)-\int_{-\infty}^{x}f(x,a_3/\sqrt{n})\,dx|=O(1/n).$$

Passons maintenant au cas où $x_1, x_2,\ldots, x_n,\ldots$ et $y_1, y_2,\ldots, y_n,\ldots$ sont des variables aléatoires telles que x_n dépend seulement de y_n. Posons pour x, y, t', t'' réels:

$$F_n(x,y)=P\{x_n\leq x, y_n\leq y\}, \qquad \varphi_n(t't'')=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(xt'+yt'')}dF_n(x,y),$$

$$a_{ij}=\mathcal{E}(x_n^i y_n^j), \qquad b_{ij}=\mathcal{E}(|x_n|^i|y_n|^j).$$

Supposons que $F_n(x,y)=F(x,y)$ pour $n=1,2,\ldots$ et, par conséquent, que $\varphi_n(t',t'')=\varphi(t',t'')$. Supposons encore que $a_{10}=a_{01}=0$, $a_{20}=a_{02}=1$ et que a_{k0}, a_{0k} soient finis pour un certain $k\geq3$.

Soit $V(x,y)$ une fonction dont les moments a'_{ij} pour $i,j\geqslant 0$, $i+j\leqslant k-1$ sont égaux respectivement à a_{ij}, les moments b'_{k0}, b'_{0k} sont finis et qui satisfait aux conditions:

(B_1) $V(-\infty,y)=V(x,-\infty)=V(-\infty,-\infty)=0,\qquad V(+\infty,+\infty)=1,$

(B_2) $V(x,y)$ possède les dérivées $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$, $\partial^2 v/\partial x\partial y$ continues et bornées dans tout le plan,

(B_3) $V(x,y)$ est à variation bornée dans tout le plan.

Posons par induction:

$$V_2(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}V(x-\zeta,y-\eta)\,dV(\zeta,\eta),\quad V_n(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}V_{n-1}(x-\zeta,y-\eta)\,dV(\zeta,\eta).$$

Théorème II. *Si $\Phi_n(x,y)$ est la loi de probabilité des variables $(x_1+\ldots+x_n)/\sqrt{n}$ et $(y_1+\ldots+y_n)/\sqrt{n}$, et si $\varphi(t',t'')$ satisfait à la condition*

$$(C_1)\qquad \begin{aligned}&\varphi(t',t'')=O(|t'\cdot t''|) \quad \textit{pour} \quad |t'|,|t''|\to+\infty,\\ &|\varphi(t',t'')|<1 \quad \textit{pour} \quad |t'|+|t''|\neq 0,\end{aligned}$$

on a

$$\sup_{x,y}|\Phi_n(x,y)-V_n(x\sqrt{n},y\sqrt{n})|=O(1/n^{(k-2)/2-\alpha})\qquad \textit{pour tout}\quad \alpha>0.$$

3. VI. 1938. Lebesgue H. (Paris). *Quelques remarques sur la structure des polyèdres de genre zéro.*

3. VI. 1938. Neumann J. (Princeton). *Continuous geometry* [Proc. Nat. Acad. 22 (1936), 92–100].

10. VI. 1938. Ulam S. (Cambridge, Mass.). *The existence of metrically transitive transformations* [Cf. J. C. Oxtoby and S. M. Ulam, *The existence of metrically transitive transformations*, Preliminary report. Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938), p. 347].

10. VI. 1938. Szpilrajn E. *Operations upon sequences of sets.*

The author deals with some kinds of operations upon sequences of sets, viz. the class of *analytical operations* (in the sense of Kantorovitch-Livenson)[1]) and two wider classes of operations defined as follows:

Definitions. An operation $F(E_1,E_2,\ldots)$ is called operation in the sense of the General Theory of Sets, or briefly *G-operation* (*G*-operation*), if the equivalence[2]) (the total isomorphism[3])) of the sequences: $A, A_1, A_2, \ldots$ and $B, B_1, B_2, \ldots$ and the equality $A=F(A_1,A_2,\ldots)$ imply the equality $B=F(B_1,B_2,\ldots)$.

---

[1]) Fund. Math. 18 (1932), p. 224.

[2]) Two sequences of sets $\{E_n\}$ and $\{E'_n\}$ are called *equivalent* (or *represent the same type of equivalence*) if there exists a (1:1)-transformation $\varphi(p)$ such that $\varphi(E_n)=E'_n$ for $n=1,2,\ldots$

[3]) Cf. this volume, p. 119.

Theorems. I. *Each analytical operation is a G^*-operation. Each G^*-operation is a G-operation.*

II. *A G-operation $F(E_1,E_2,...)$ is analytical if and only if for each set X the equality $E=F(E_1,E_2,...)$ implies the equality $EX=F(E_1X, E_2X,...)$.*

III. *The class of all analytical operations is the smallest class K of operations such that:* 1⁰ *each operation $\Phi_n(E_1,E_2,...)=E_n$* $(n=1,2,...)$ *belongs to K,* 2⁰ *and* 3⁰ *for each transfinite sequence $F_\xi(E_1,E_2,...)$ of operations belonging to K the operations $\sum_\xi F_\xi(E_1,E_2,...)$ and $F_1(E_1,E_2,...)-F_2(E_1,E_2,...)$ also belong to K*[1]).

IV. *Let T be a subset of Cantor's discontinuum* (*without the point* 0) *and let $c_e(x)$ denote the characteristic function of a sequence $e=\{E_n\}$. The function*

$$F(E_1,E_2,...)=c_e^{-1}(T)$$

is (i) *an analytical operation,* (ii) *a G^*-operation,* (iii) *a G-operation, whenever the set T* (i′) *is fixed,* (ii′) *depends only on the set $c_e(E_1+E_2+...)$,* (iii′) *depends only on the type of equivalence*[2]) *of the sequence e.*

Conversely, each operation belonging to the classes (i), (ii) or (iii) *can be represented in this way.*

Examples. 1. $G(E_1,E_2,...)=$ the first of the sets E_n which is of the smallest power. It is a G-operation but not a G^*-operation.

2. $H(E_1,E_2,...)=E_1\cdot E_2\cdot ...$ or $E_1+E_2+...$, if $E_1E_2\neq 0$ or $E_1E_2=0$ respectively. It is a G^*-operation but not an analytical operation.

17. VI. 1938. Lindenbaum A. *Sur les bases des familles de fonctions.*

D étant un ensemble quelconque, soit $\mathfrak{R}$ une famille quelconque de fonctions $f(...,x_i,...)$ dont chacune des variables x_i parcourt l'ensemble (le *champ*) D et dont les valeurs appartiennent à D. Soient: $\mathfrak{R}^{[k]}$ la famille des fonctions de k variables $f(x_1,...,x_k)$ appartenant à $\mathfrak{R}$; ensuite, $\mathfrak{R}^{[\omega]}=\mathfrak{R}^{[0]}+\mathfrak{R}^{[1]}+...+\mathfrak{R}^{[k]}+...$[3]); $\mathfrak{R}^{I}$ la famille des fonctions de $\mathfrak{R}^{[1]}$ qui transforment D en lui même d'une façon biunivoque (permutations de D); $\mathfrak{R}^{\infty}$ la famille de toutes les fonctions que l'on peut obtenir par superposition (finie) des fonctions de $\mathfrak{R}$. Soit enfin $\mathfrak{F}$ la famille de toutes les fonctions (dans le champ D).

Après avoir signalé quelques théorèmes élémentaires, l'auteur introduit la notion de *base* d'une famille de fonctions. En se bornant au cas le plus important, on dira notamment que $\mathfrak{X}$ est une *base exacte* pour $\mathfrak{R}$, lorsque $\mathfrak{X}^{\infty}=\mathfrak{R}$, et une *base topologique*, lorsque $\mathfrak{X}^{\infty}$ est dense dans la famille $\mathfrak{R}$ constituant un espace fonctionnel topologique. Il peut être question de trouver une base aussi petite que possible, d'où les notions de base *mini-*

---

[1]) This th. is analogous to a th. of Sierpiński on Hausdorff operations, Comptes Rendus Soc. Sci. Varsovie 21 (1928), p. 463.

[2]) Cf. this volume, p. 119.

[3]) $\mathfrak{R}^{[\omega]}$ peut ne pas être identique à $\mathfrak{R}$, si p. ex. $\mathfrak{R}$ contient des fonctions d'une suite infinie $f(x_1,x_2,...)$.

male (de puissance la plus petite possible), *irréductible* (ne contenant aucune autre base) et *absolue* (contenue dans toutes les bases). Une base minimale existe toujours. Sa *puissance* dans le cas d'un champ fini ou dénombrable pour la famille $\mathcal{F}$ des fonctions arbitraires et — à titre d'un exemple différent — pour la famille $\mathcal{L}$ des fonctions définissables du calcul multivalent des propositions de M. Łukasiewicz[1]) est à lire de la table suivante:

Table des puissances des bases minimales

Puissance du champ / Famille de fonctions	2	$n>2$ fini [2])	$\aleph_0$
$\mathcal{F}^I$	1	2	2 [3])
$\mathcal{F}^{[1]}$	2	3	2 [3])
$\mathcal{F}^{[\omega]}$	1 [4]) [5])	1 [4]) [6])	1 [3]) [4])
$\mathcal{L}^I$	1	1	1 [7])
$\mathcal{L}^{[1]}$	2	La puissance croît vers ∞ avec n	$\aleph_0$ [7])
$\mathcal{L}^{[\omega]}$	1 [4]) [5])	1 [4]) [8])	2? [7])

Quant aux bases exactes (pas nécessairement minimales) dans les champs infinis, l'auteur signale que:

(1) *Il existe une relation binaire Uxy dans le champ dénombrable, universelle au sens de M. Mostowski*[9]), c. à d.: toute relation binaire dans le champ dénombrable est isomorphe à la relation U restreinte à un champ convenable;

---

[1]) voir J. Łukasiewicz et A. Tarski: C. R. Soc. Sc. Varsovie 23 (1930) p. 39, où ce calcul, basé sur les notions C et N, est défini par leurs matrices.

[2]) Le contenu d'une base dépend de n, mais on voit que la puissance en est constante, sauf le cas de $\mathcal{L}^{[1]}$.

[3]) Ici, il s'agit d'une base topologique (la topologie étant celle de l'espace 0-dimensionnel de Baire); pour la base exacte, on aurait la puissance $2^{\aleph_0}$. Cf. ces Annales 13 (1934), p. 131: il est à remarquer que la puissance d'une base minimale pour les permutations pourrait être double de celle d'un ensemble des générateurs du groupe.

[4]) Il suffit une fonction de $\mathcal{F}^{[2]}$.

[5]) L'élément unique de cette base est p. ex. la fonction de M. Sheffer, connue en logique.

[6]) Un élément unique d'une telle base a été trouvé par M. Webb.

[7]) Base exacte.

[8]) Un élément unique d'une telle base a été trouvé par M. McKinsey.

[9]) Ce Compte Rendu, séance du 25. III. 1938, p. 117.

(2) La réponse à un problème posé par M. Sierpiński[1]) est négative.

(3) Il existe une fonction continue de deux variables réelles qui ne se laisse obtenir par aucune superposition (finie) de fonctions continues d'une seule variable réelle et de la fonction de deux variables $s(x,y)=x+y$ [2]).

24. VI. 1938. Leray J. (Nancy). *Discussion du problème de Dirichlet* [à paraître dans le Journal des Mathématiques].

24. VI. 1938. Kuratowski K. *Sur le groupe des transformations en circonfèrence* [à paraître dans les Fund. Math. **31** (1938)].

SECTION DE WILNO

21. II. 1938. Marcinkiewicz J. *Sur les fonctions indépendantes* [Fund. Math. **30** (1938), 202–214 et 347–364].

23. V. 1938. Kempisty S. *Sur les fonctions à variation bornée au sens de Tonelli* [à paraître dans les Travaux Soc. Sc. et Lettres de Wilno **13**].

En posant pour le rectangle $R=\langle a; a+h; b; b+k)$:

$$H_1(f,R)=k\cdot \min_{b\leqslant y\leqslant b+k} |f(a+h,y)-f(a,y)|,$$
$$H_2(f,R)=h\cdot \min_{a\leqslant x\leqslant a+h} |f(x,b+k)-f(x,b)|,$$
$$H\,(f,R)=[|R|^2+H_1^2+H_2^2]^{1/2},$$

l'aire de la surface $z=f(x,y)$ au sens de Lebesgue est égale à l'intégrale supérieure au sens de Burkill de la fonction $H(f,R)$. Il en résulte les propriétés caractéristiques des fonctions à variation bornée au sens de Tonelli et des fonctions absolument continues au même sens.

PRIX SCIENTIFIQUES, THÈSES ET DOCTORATS

Prof. Dr Bartel C. (Lwów) a obtenu le *Prix Scientifique de la Ville de Lwów* 1938 pour l'ensemble de ses travaux scientifiques.

Doc. Dr Schauder J. (Lwów) a obtenu le *Prix Malaxa* 1938 pour son Mémoire sur les équations differentielles partielles du type elliptique et hyperbolique.

Mgr Butlewski Z., Université de Poznań. Thèse: *Sur les*

---

[1]) Fund. Math. 27 (1936), p. 8.

[2]) Cf. les recherches de MM. Hilbert, Ostrowski, Bieberbach.

intégrales réelles des équations différentielles linéaires ordinaires [parue dans Prace Matematyczno-Fizyczne **44** (1938), 17–81 (en polonais)].

Mgr Eidelheit M., Université de Lwów. Thèse: *Sur les solutions des systèmes d'équations linéaires à infinité d'inconnues* [à paraître dans Wiadomości Matematyczne, Warszawa (en polonais); extrait partiel paru aux C. R. Acad. Paris **205** (1937), 206-208].

Mgr Mostowski A., Université de Varsovie. Thèse: *O niezależności definicji skończoności w systemie logiki (Sur l'indépendence de la définition de finitude dans un système de logique)* [parue comme Supplément à ces Annales **16** (1938), en polonais].

Mgr Pepis J., Université de Lwów. Thèse: *Über das Entscheidungsproblem im Bereich des engeren Funktionenkalküls* [parue dans l'Archive Soc. Sc. Lwów 1937 (en polonais)].

En outre, M. Lebesgue Henri, Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne et au Collège de France, a été nommé Docteur *honoris causa* de l'Université de Lwów. L'acte solennel a eu lieu à l'Université de Lwów le 28. V. 1938.

PROBLÈMES

1) Soit E un ensemble fermé et borné des points du plan, $\zeta=\{\zeta_0,\zeta_1,\ldots,\zeta_n\}$ un système de $n+1$ points de E, $a_{jk}=\dfrac{z-\zeta_k}{\zeta_j-\zeta_k}$ pour $j\neq k=0,1,\ldots,n$ et $a_{jj}=1$. Lorsque les points ζ varient arbitrairement dans E les 4 fonctions de z et ζ

$$A(z,\zeta)=\prod_{j,k=0}^{n}|a_{jk}|,\qquad B(z,\zeta)=\max_{(j)}\prod_{k=0}^{n}|a_{jk}\cdot a_{kj}|,$$

$$C(z,\zeta)=\max_{(j)}\prod_{k=0}^{n}|a_{jk}|,\qquad D(z,\zeta)=\max_{(j)}\prod_{k=0}^{n}|a_{kj}|$$

atteignent leurs bornes inférieures qui seront désignées respectivement par $A_n(z)$, $B_n(z)$, $C_n(z)$, $D_n(z)$.

On sait (Bullet. Acad. Polon. 1933, p. 281–289; ces Annales t. 12, 1934, p. 57–71 et t. 13, 1935, p. 53–58) que 1^0 les suites $\{\sqrt[n(n+1)]{A_n(z)}\}$, $\{\sqrt[2n]{B_n(z)}\}$, $\{\sqrt[n]{C_n(z)}\}$, $\{\sqrt[n]{D_n(z)}\}$ tendent dans le plan entier vers certaines fonctions limites $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, $D(z)$, 2^0 $\log C(z)$ est égal à la fonction de Green du domaine infini extérieur à E ayant son pôle à l'infini, et que 3^0 on a identiquement $A(z)=B(z)$. Peut-on affirmer qu'on a aussi $A(z)=C(z)=D(z)$?

Problème de M. F. LEJA.

2) Soit Δ le déterminant du degré n dont le terme général est de la forme $\delta_{ij}+\varepsilon_{ij}$, où $\delta_{ij}=0$ lorsque $i\neq j$, $\delta_{ii}=1$ et les ε_{ij} sont quelconques. Quelle est la valeur minima M de Δ lorsque les ε_{ij} varient tout en satisfaisant aux inégalités $|\varepsilon_{ij}|\leqslant a<\dfrac{1}{n}$ (a est fixe)? (On peut démontrer que $0<M\leqslant 1-na$. Suivant une observation de M. Biernacki le minimum M ne peut être atteint que dans le cas $|\varepsilon_{ij}|=a$).

Problème de M. T. WAŻEWSKI.

